# Wykład I

- Funkcje zespolone,
- Różniczkowanie funkcji zespolonych, funkcje holomorficzne,
- Całkowanie funkcji zespolonych, wzór Cauchy'ego, szereg Laurenta, residuum funkcji,
- Obliczanie całek rzeczywistych metodą residuów,
- Odwzorowania konforemne.

$$z = x + iy = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}\right), \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \mathrm{Im}\left(e^{i\varphi}\right)$$

Dla dowolnej funkcji zespolonej

$$f(z) = \mathrm{Re}\, f(z) + \mathrm{Im}\, f(z) = u(z) + iv(z)$$

$$u(z) = u(x+iy) = u(x,y), \quad v(z) = v(x+iy) = v(x,y)$$

Przykłady

$$f(z) = z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi$$

$$f(z) = \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right) = \frac{1}{2i}\left[\left(e^{-y} - e^{y}\right)\cos x + i\left(e^{-y} + e^{y}\right)\sin x\right]$$

$$= \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$$

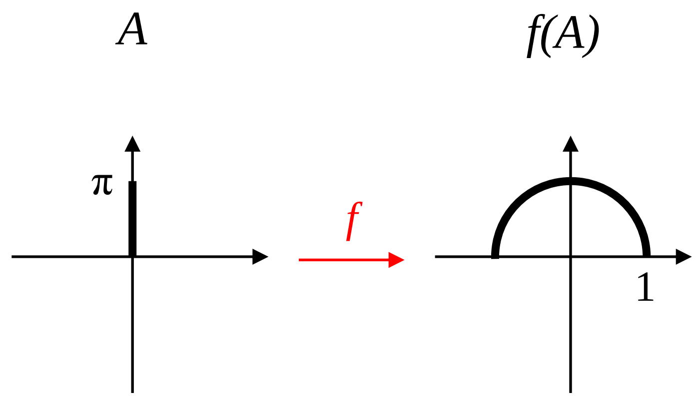
Przykłady: funkcje wieloznaczne (z wieloma gałęziami)

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = z^{1/n} \Rightarrow f_0(z) = \sqrt[3]{r}e^{i\varphi/3}, \quad f_1(z) = \sqrt[3]{r}e^{i(\varphi+2\pi)/3}, \quad f_2(z) = \sqrt[3]{r}e^{i(\varphi+4\pi)/3}$$

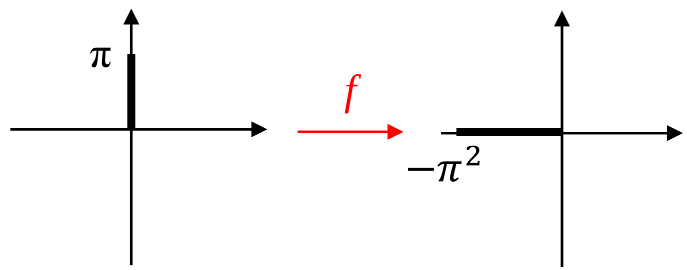
$$f(z) = \ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

# Obrazowanie przy pomocy funkcji zespolonych

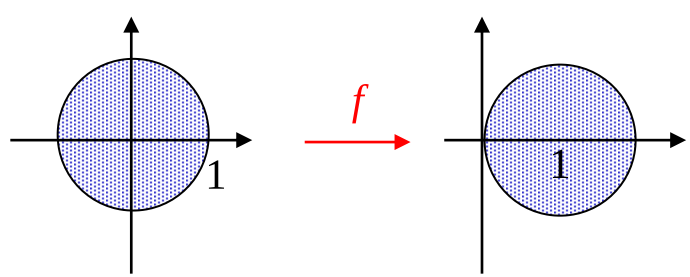
$$
\begin{aligned}
A &= \{z = x + iy : x = 0, y \in \langle 0, \pi \rangle\}, \quad f(z) = e^z \\
z &= iy \Rightarrow f(z) = e^{iy} \Rightarrow f(A) = \{z : z = e^{iy}, y \in \langle 0, \pi \rangle\}
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
A &= \{z = x + iy : x = 0, y \in \langle 0, \pi \rangle\}, \quad f(z) = z^2 \\
z &= iy \Rightarrow f(z) = i^2 y^2 = -y^2 \Rightarrow f(A) = \{z = x + iy : x \in \langle -\pi^2, 0 \rangle, y = 0\}
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
A &= \{z = x + iy : x^2 + y^2 = |z|^2 \le 1\}, \quad f(z) = iz + 1 \\
\Rightarrow A &= \{z = re^{i\phi} : r \le 1, \phi \in \langle 0, 2\pi)\} \\
f(z) &= ire^{i\phi} + 1 = re^{i(\phi + \pi/2)} + 1 = re^{i\varphi} + 1, \; \varphi \in \langle 0, 2\pi) \\
\Rightarrow f(A) &= \{z = x + iy : (x-1)^2 + y^2 = \le 1\}
\end{aligned}
$$



# Różniczkowanie funkcji zespolonych

$f(z)$ - funkcja zespolona

$$z=(x,y)\Rightarrow df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx+idy)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx-idy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad dz=dx+idy,\ d\bar{z}=dx-idy$$

$$\Rightarrow df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

## Funkcje holomorficzne

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

- Warunki Cauchy'ego-Riemanna

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}}$$

# Całkowanie funkcji zespolonych

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

$$\int_C (udx - vdy) = \int_C (u,-v)\cdot d\vec{l}\,,\ldots$$

Twierdzenie Stokesa $\displaystyle\oint_C \vec{w}\cdot d\vec{l} = \iint_{\mathrm{Int}\,C} \mathrm{rot}\vec{w}\cdot d\vec{s}$

Korzystając z twierdzenia Stokesa w dwóch wymiarach i uwzględniając warunki Cauchy'ego-Riemanna, otrzymujemy dla całek po krzywych zamkniętych z funkcji holomorficznych

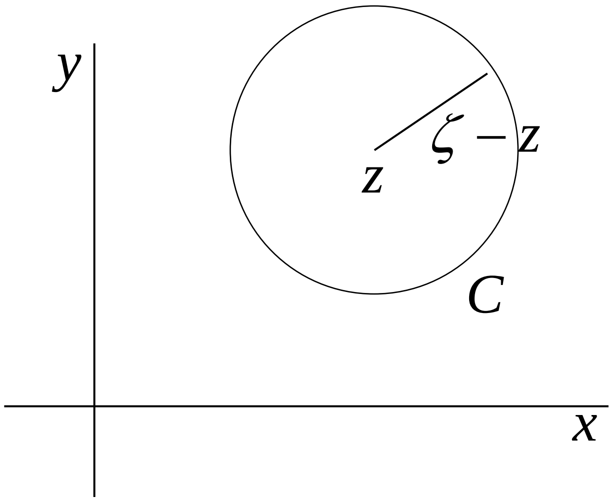
$$\boxed{\oint_C f(z)dz = \iint_{\mathrm{Int}\,C}\left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy + i\iint_{\mathrm{Int}\,C}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0}$$

- Wartość całki z funkcji holomorficznej po krzywej otwartej nie zależy od kształtu krzywej, tylko od punktu początkowego i końcowego
- Krzywą całkowania można dowolnie deformować bez zmiany wartości całki, o ile pozostajemy w obszarze holomorficzności funkcji podcałkowej

# Wzór całkowy Cauchy'ego

$f(z)$ - funkcja holomorficzna w obszarze obejmującym krzywą $C$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta}$$




$C$ jest dowolną krzywą obejmującą $z$
$z$ jest jedynym biegunem funkcji podcałkowej wewnątrz $C$
Funkcja podcałkowa nie ma zatem osobliwości w okolicy krzywej $C$ więc jest tam holomorficzna
Dlatego możemy zastąpić krzywą $C$ okręgiem o środku w $z$ i przejść z jego promieniem do zera

$$\zeta - z = re^{i\varphi}$$
$$d\zeta = ire^{i\varphi}d\varphi$$

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = i\int_0^{2\pi} f\left(z+re^{i\varphi}\right)d\varphi \xrightarrow[r\to 0]{} if(z)\int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi i f(z)$$

# Szereg Laurenta

$f(z)$ - funkcja holomorficzna

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l (z-z_0)^l}$$

Niech $O$ będzie okręgiem o środku w $z_0$

$$(z-z_0)^k f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{k-n} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l (z-z_0)^{k+l}$$

$$\oint_O (z-z_0)^k dz = \left\langle z - z_0 = re^{i\varphi} \right\rangle = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = 2\pi i r^{k+1} \delta_{k,-1} = 2\pi i \delta_{k,-1}$$

W powyższych wzorach funkcja podcałkowa nie ma biegunów poza $z_0$ jest więc holomorficzna poza $z_0$ i okrąg $O$ można zastąpić dowolną krzywą $C$ obejmującą $z_0$, bez zmiany wyniku całkowania.

$$\boxed{a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z-z_0)^{n-1} f(z) dz, \quad b_l = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{l+1}} dz}$$

# Residuum funkcji

$$\boxed{a_{-1} \equiv \operatorname{res}_{z_0} \Rightarrow \oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0}}$$

- Jeżeli krzywa $C$ obejmuje kilka punktów osobliwych

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{res}_{z_j}}$$

- Metoda obliczania residuum funkcji

Niech funkcja $f(z)$ ma biegun skończonego rzędu $m$ w $z_0$

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{l=0}^{\infty}b_l(z-z_0)^l$$

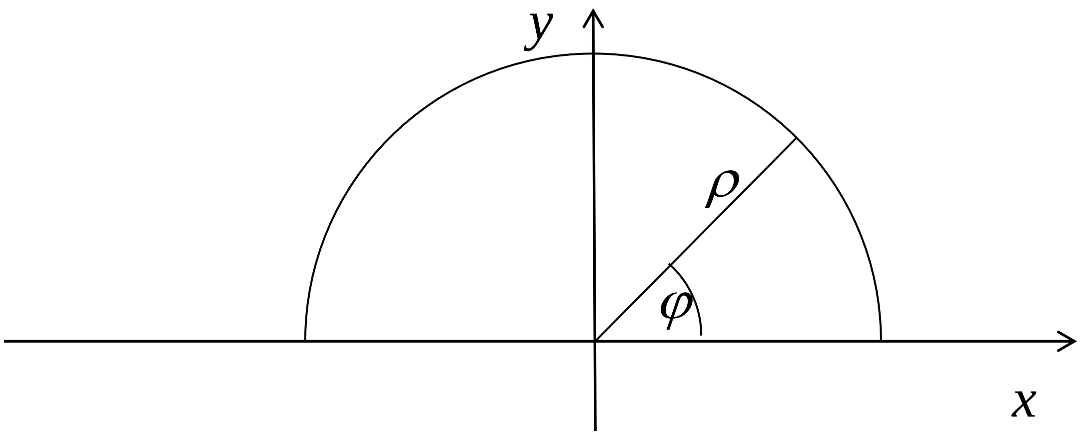
$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{l=0}^{\infty}b_l(z-z_0)^{l+m}$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!\,a_{-1}+\sum_{l=0}^{\infty}b_l\frac{(l+m)!}{(l+1)!}(z-z_0)^{l+1}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!\,a_{-1}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{res}_{z_0}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}\\ m=1\Rightarrow\ f(z)=\frac{g(z)}{h(z)},\ h(z_0)=0,\ h'(z_0)\neq 0\Rightarrow \operatorname{res}_{z_0}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\end{gathered}}$$

# Lemat Jordana




Jeżeli dla $\rho \to \infty \quad |R(z)| \to 0$ jednostajnie w $\vartheta$ dla $0 < \vartheta < \pi$ to

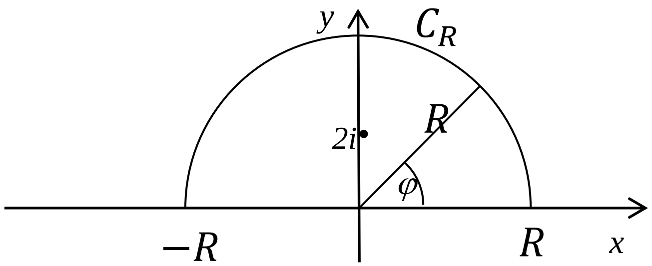
$$\boxed{\lim_{\rho\to\infty} \int_{|z|=\rho} R(z) e^{i\alpha z} dz = 0, \quad \alpha > 0}$$

Lemat ułatwia obliczanie całek oznaczonych

## Zastosowanie całek zespolonych do obliczania całek rzeczywistych niewłaściwych

Przykład. Obliczyć całkę

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$$




Rozpatrujemy całkę po konturze $C$ domkniętym w górnej półpłaszczyźnie ($C_R$ oznacza półokrąg o promieniu $R$ w górnej półpłaszczyźnie)

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+4} = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+4}}_{\xrightarrow{R\to\infty} I} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+}$$

Szacujemy wartość funkcji podcałkowej na półokręgu $C_R$:

$$\begin{aligned} |F(z)|_{C_R} &= \left|\frac{1}{z^2+4}\right|_{z=Re^{i\phi}} = \frac{1}{|R^2e^{2i\phi}+4|} = \frac{1}{\sqrt{(R^2e^{2i\phi}+4)\,(R^2e^{-i2\phi}+4)}} = \frac{1}{\sqrt{R^4+4R^2\left(e^{2i\phi}+e^{-2i\phi}\right)+16}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^4+8R^2\cos\phi+16}} \le \frac{1}{\sqrt{R^4-8R^2+16}} = \frac{1}{R^2-4} < \frac{2}{R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \\ &\Rightarrow \left|\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+4}\right| \le \pi R\frac{2}{R^2} = \frac{2\pi}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Bieguny funkcji podcałkowej $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, tylko $z_1$ należy do wnętrza konturu $C$,

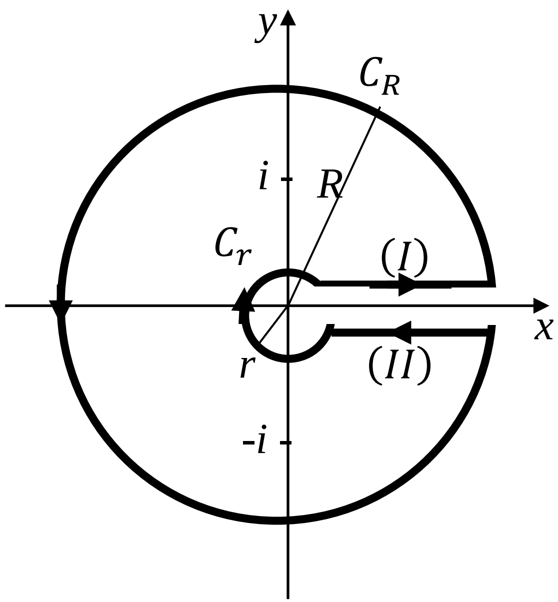
$$\oint_C \frac{dz}{z^2+4} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1}\frac{1}{z^2+4} = 2\pi i \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{1}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+4} = \oint_C\frac{dz}{z^2+4} = \frac{\pi}{2}$$

Całki funkcji o wielu gałęziach. Przykład.

Obliczyć całkę

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$$




Rozpatrzmy całkę pomocniczą z funkcji $F(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}$, przy czym w $\sqrt{z} = |z|^{1/2}(e^{i(\phi+2n\pi)})^{1/2} = |z|^{1/2}e^{i(\phi/2+n\pi)}$, $n \in \mathbb{N}$ rozpatrujemy gałąź z $n = 0$.

Kontur całkowania $C$ jak na rysunku obok, $r \to 0$, $R \to \infty$, funkcja $F(z)$ ma bieguny rzędu pierwszego $z_1 = i = e^{i\pi/2}$, $z_2 = -i = e^{3i\pi/2}$ należące do wnętrza konturu $C$,

$\mathrm{res}_{z_1}F(z) = \left.\frac{\sqrt{z}}{2z}\right|_{z=z_1} = \frac{(e^{i\pi/2})^{1/2}}{2e^{i\pi/2}} = e^{-i\pi/4}/2,$

$\mathrm{res}_{z_2}F(z) = \left.\frac{\sqrt{z}}{2z}\right|_{z=z_2} = \frac{(e^{3i\pi/2})^{1/2}}{2e^{3i\pi/2}} = e^{-3i\pi/4}/2 = e^{i\pi+i\pi/4}/2 = -e^{i\pi/4}/2$

$$J = \oint_C F(z)dz = \oint_C \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz = \left(\int_{(I)} + \int_{C_R} + \int_{(II)} + \int_{C_r}\right)\frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz$$

$$J = 2\pi i\left(\mathrm{res}_{z_1}F(z) + \mathrm{res}_{z_2}F(z)\right) = -2\pi i\frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{2i}i = 2\pi\sin(\pi/4) = \sqrt{2}\pi$$

(ciąg dalszy – patrz następna transparencja)

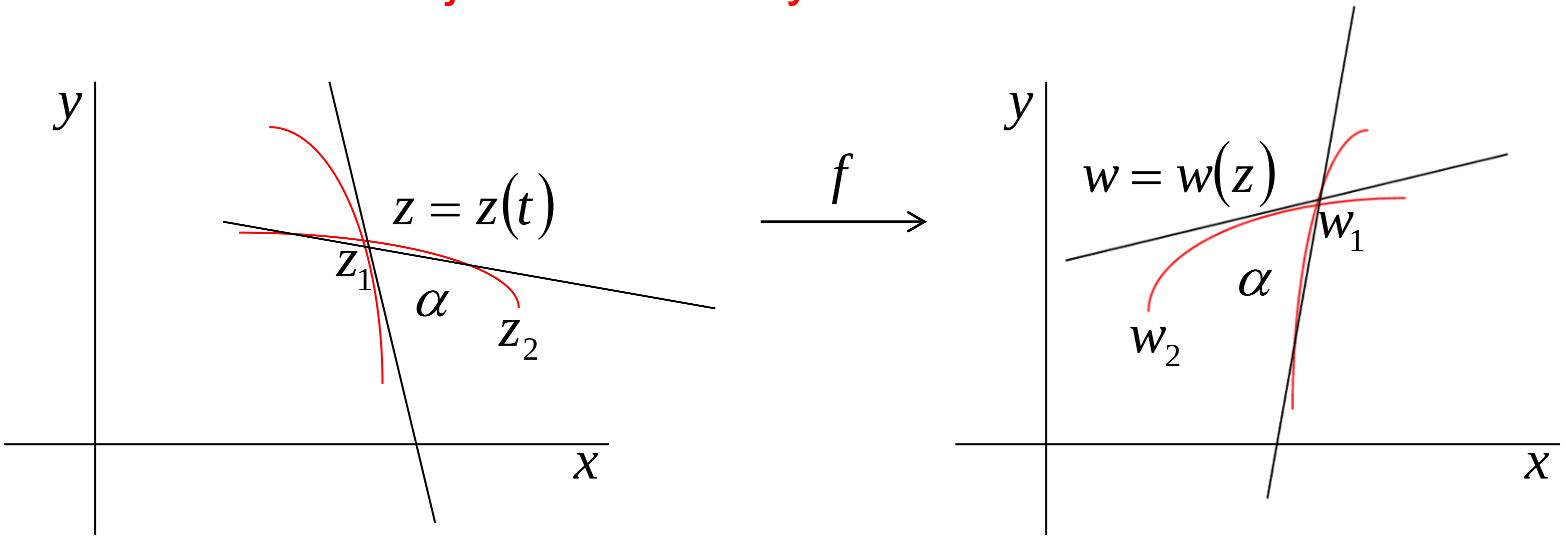
- Na odcinku $(I)$ $\sqrt{z} = x^{1/2}e^{i0/2} = x^{1/2}$,
- Na odcinku $(II)$ (zwróćmy uwagę, że ze względu na kierunek obiegu konturu całka po $(II)$ jest w granicach od $R$ do $r$) $\sqrt{z} = x^{1/2}e^{i2\pi/2} = x^{1/2}e^{i\pi} = -x^{1/2}$,
- Na dowolnym okręgu $C_\rho$ o środku $(0,0)$ i promieniu $\rho$, dokonując podstawienia $z = \rho e^{i\phi}$, $\phi \in (0, 2\pi)$, $\Rightarrow dz = i\rho e^{i\phi}d\phi$, otrzymujemy

$$\left|\int_{C_\rho} F(z)dz\right| = \left|\int_{C_\rho} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{\rho^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\phi}{2}}i\rho e^{i\phi}d\phi}{\rho^2 e^{i2\phi}+1}\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{\rho^{\frac{3}{2}}ie^{\frac{3}{2}i\phi}}{\rho^2 e^{i2\phi}+1}\right|d\phi = \rho^{\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{|\rho^2 e^{2i\phi}+1|}$$

  - ☐ Dla $\rho = r \to 0$ $\lim_{r\to 0} r^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{|r^2 e^{2i\phi}+1|} = \lim_{r\to 0} r^{\frac{3}{2}} 2\pi = 0 \Rightarrow \lim_{r\to 0}\int_{C_r} F(z)dz = 0$
  - ☐ Dla $\rho = R \to \infty$ (por oszacowanie funkcji podcałkowej na poprzedniej transparencji) $\lim_{R\to\infty} R^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{|R^2 e^{2i\phi}+1|} \le \lim_{R\to\infty} R^{\frac{3}{2}} \frac{2}{R^2} 2\pi = \lim_{R\to\infty} \frac{4\pi}{\sqrt{R}} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)dz = 0$

$$\sqrt{2}\pi = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left(\int_{(I)} + \int_{C_R} + \int_{(II)} + \int_{C_r}\right)\frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{x^2+1}dx + \int_\infty^0 \frac{-x^{1/2}}{x^2+1}dx = 2\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{x^2+1}dx = 2I \Rightarrow I = \sqrt{2}\pi/2$$

# Konforemność funkcji holomorficznych




- Odwzorowania (funkcje) holomorficzne zachowują kąty między krzywymi na płaszczyźnie zespolonej

$f(z)$ - funkcja holomorficzna w danym obszarze, $f'(z) \neq 0$

$$z = z(t),\ t \in (t_1, t_2); \quad z(t_k) = z_k,\ k = 1,2; \quad \varphi = \arg z'(t_1)$$

$$w = w(z),\ z \in (z_1, z_2); \quad f(z_k) = w_k,\ k = 1,2; \quad \Phi = \arg w'(z_1) = \arg \left.\tfrac{dw}{dt}\right|_{z_1}$$

$$f'(z_1) \neq 0 \Rightarrow \exists \delta = \arg f'(z_1)$$

$$w'(z_1) = f'(z_1) z'(t_1) \Rightarrow \Phi = \delta + \varphi$$

Dla dwóch krzywych $\Phi_1 = \delta + \varphi_1,\ \Phi_2 = \delta + \varphi_2 \Rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1$


2012/9/29 12:05