Wykład XIII

- Funkcje i dystrybucje okresowe,
- Rozwinięcie dystrybucji okresowej na szereg Fouriera,
- Szereg sinusów i cosinusów.

Dystrybucje okresowe

Dystrybucja okresowa o okresie L $\quad T(x)=T(x+nL)$

$\varphi \in D$ funkcja próbna

Przykład: $T(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nL)$ jest ciągiem delt Diraca, centrowanych w kolejnych liczbach całkowitych (por. rysunek na ostatnim slajdzie).

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}T(x)\varphi(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{nL}^{(n+1)L}T(x)\varphi(x)dx=\left|y=x-nL\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{0}^{L}T(y)\varphi(y+nL)dy$$

Niech $\psi\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(y+nL)$ będzie funkcją zdefiniowaną dla $y\in\langle 0,L\rangle$

$\varphi\in D$ jest dowolną funkcją próbną, więc ψ jest dowolną funkcją na $\langle 0,L\rangle$

Dystrybucje okresowe są definiowane inaczej niż zwykłe dystrybucje. Funkcjami próbnymi są w tym wypadku dowolne funkcje, określone na dowolnym przedziale o długości L (tylko umownie przyjmuje się przedział $(0,L)$), można go dowolnie przesuwać). Działanie dystrybucji okresowej na funkcje próbne definiuje się przez całkę po dowolnym przedziale o długości L, jak poniżej.

- Działanie dystrybucji okresowej na funkcje próbne definiujemy jako całkę po okresie dystrybucji z dowolną funkcją

$$\boxed{\langle T,\varphi\rangle=\int_{0}^{L}T(y)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(y+nL)dy=\int_{0}^{L}T(y)\psi(y)dy\equiv\langle\langle T,\psi\rangle\rangle}$$

Symbol $\langle\langle T,\psi\rangle\rangle$ nie oznacza np. jakiejś podwójnej średniej, tylko zdefiniowaną obok całkę po przedziale o długości L (dowolnym, przedział $(0,L)$ przyjęto umownie).

Szereg Fouriera dystrybucji okresowej (tzw. wykładniczy szereg Fouriera)

$$\boxed{T(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} \exp\left(2\pi i n \frac{x}{L}\right), \quad c_n^{(T)} \equiv \frac{1}{L}\left\langle\left\langle T, \exp\left(-2\pi i n \frac{x}{L}\right)\right\rangle\right\rangle} \qquad (\clubsuit)$$

Dowolną funkcję ψ na przedziale $\langle 0, L\rangle$ możemy rozłożyć na szereg Fouriera

$$\psi(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^{(\psi)} \exp\left(-2\pi i m \frac{x}{L}\right)$$

Znak minus w wykładniku nie ma znaczenia, ponieważ sumujemy po wszystkich liczbach całkowitych

Widać że

$$\left\langle\left\langle \overset{(\spadesuit)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} \exp\left(2\pi i n \frac{x}{L}\right)}, \psi(x)\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} \exp\left(2\pi i n \frac{x}{L}\right), \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^{(\psi)} \exp\left(-2\pi i m \frac{x}{L}\right)\right\rangle\right\rangle$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} c_m^{(\psi)} \left\langle\left\langle \exp\left(2\pi i n \frac{x}{L}\right), \exp\left(-2\pi i m \frac{x}{L}\right)\right\rangle\right\rangle$$

Symbol $\langle\langle . \rangle\rangle$ oznacza całkę, więc całka z sumy wyrażeń jest równa sumie całek

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} c_m^{(\psi)} \int_0^L e^{2\pi i (n-m) x/L} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} c_m^{(\psi)} L \delta_{m,n} \overset{(\clubsuit)}{=}$$

$n \neq m \Rightarrow \int_0^L e^{\frac{2\pi i (n-m) x}{L}} dx = 0$ jako całka z funkcji okresowej o okresie L.

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(\psi)} L \frac{1}{L} \left\langle\left\langle T, \exp\left(-2\pi i n \frac{x}{L}\right)\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle T, \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(\psi)} \exp\left(-2\pi i n \frac{x}{L}\right)\right\rangle\right\rangle = \langle\langle T, \psi\rangle\rangle$$

Wniosek: $(\spadesuit) = T$

Rozkład dystrybucji na tzw. trygonometryczny szereg Fouriera (sinusów i cosinusów)

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) = c_0^{(T)} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(T)} \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(T)} \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) =$$

$$= c_0^{(T)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n^{(T)} + c_{-n}^{(T)}\right] \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) = c_0^{(T)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n^{(T)} + \bar{c}_n^{(T)}\right] \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)$$

- $c_{-n}^{(T)} = \frac{1}{L}\langle\langle T, e^{-2\pi i n x/L}\rangle\rangle = \frac{1}{L}\overline{\langle\langle T, e^{2\pi i n x/L}\rangle\rangle} = \overline{c_n^{(T)}}$

- $c_n^{(T)} + \overline{c_n^{(T)}} \overset{(\clubsuit)}{=} \frac{1}{L}\langle\langle T, e^{-2\pi i n x/L}\rangle\rangle + \frac{1}{L}\langle\langle T, e^{2\pi i n x/L}\rangle\rangle = \frac{2}{L}\left\langle\left\langle T, \frac{e^{-2\pi i n x/L} + e^{2\pi i n x/L}}{2}\right\rangle\right\rangle = \frac{2}{L}\langle\langle T, \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\rangle\rangle$

Analogicznie

$$\begin{aligned} i \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) &= i \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(T)} \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + i \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(T)} \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \left[-c_{-n}^{(T)} + c_n^{(T)}\right] \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} i \left[c_n^{(T)} - \overline{c_n^{(T)}}\right] \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \end{aligned}$$

- $i\left[c_n^{(T)} - \overline{c_n^{(T)}}\right] \overset{(\clubsuit)}{=} \frac{i}{L}\langle\langle T, e^{-2\pi i n x/L}\rangle\rangle - \frac{i}{L}\langle\langle T, e^{2\pi i n x/L}\rangle\rangle = \frac{2i^2}{L}\left\langle\left\langle T, \frac{e^{-2\pi i n x/L} - e^{2\pi i n x/L}}{2i}\right\rangle\right\rangle = \frac{2}{L}\langle\langle T, \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\rangle\rangle$

Niech $$\boxed{a_0^{(T)} \equiv c_0^{(T)} = \frac{1}{L}\langle\langle T,1\rangle\rangle, \quad a_n^{(T)} = c_n^{(T)} + c_{-n}^{(T)} = \frac{2}{L}\left\langle\left\langle T, \cos\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)\right\rangle\right\rangle}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} \cos\left(2\pi n\frac{x}{L}\right) = a_0^{(T)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(T)} \cos\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)$$

Analogicznie $$\boxed{b_n^{(T)} = i\left(c_n^{(T)} - c_{-n}^{(T)}\right) = \frac{2}{L}\left\langle\left\langle T, \sin\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)\right\rangle\right\rangle}$$

$$\Rightarrow i\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(T)} \sin\left(2\pi n\frac{x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(T)} \sin\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)$$

$$\boxed{T(x) = a_0^{(T)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(T)} \cos\left(2\pi n\frac{x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(T)} \sin\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)}$$

Szereg Fouriera (trygonometryczny) funkcji okresowej

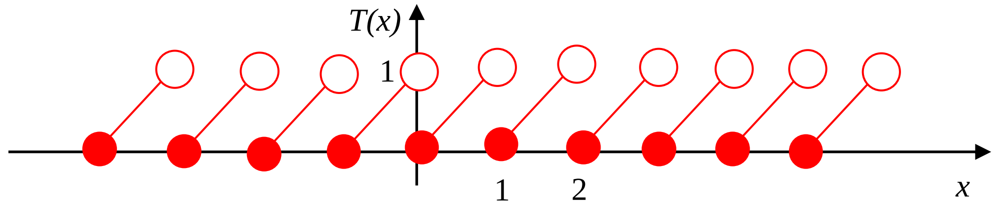
Jeżeli dystrybucja okresowa jest zwykłą funkcją okresową $T(x) = f(x)$

$$f(x) = a_0^{(f)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(f)} \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(f)} \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)$$

$$a_0^{(f)} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n^{(f)} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) dx, \quad n = 1,2,3\ldots$$

$$b_n^{(f)} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) dx, \quad n = 1,2,3\ldots$$



Przykład $T(x) = f(x) = x$, $x \in (0,1)$.

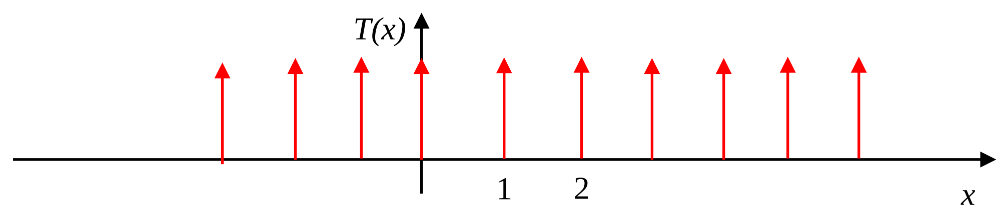
$$n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c_n^{(T)} = c_n^{(f)} = \int_0^1 x e^{-2\pi i n x} dx = -\frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 x \left(e^{-2\pi i n x}\right)' dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi i n}\left[x e^{-2\pi i n x}\Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^{-2\pi i n x} dx}_{=\int_0^1 \cos(2\pi n x)dx - i\int_0^1 \sin(2\pi n x)dx = 0} \right] = \frac{e^{-2\pi i n}}{2\pi i n} = \frac{-1}{2\pi i n} = \frac{i}{2\pi n},$$

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0^{(T)} = c_0^{(f)} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad T(x) = f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n} e^{2\pi i n x}$$

Jest to tzw dystrybucja „Sza”
(rosyjska litera Ш)



Przykład $T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$. Jako przedział całkowania można przyjąć dowolny przedział o długości $L = 1$, więc przyjmujemy $\langle -1/2, 1/2)$; nie prowadzi to do niejednoznaczności, nawet gdybyśmy przyjęli $\langle 0, 1)$, ponieważ formalnie $0 \in \langle 0, 1)$ i $\int_0^1 \delta(y)\psi(y)dy = \psi(0)$.

$$c_n^{(T)} = \langle\langle \delta(y), e^{-2\pi i n y} \rangle\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(y) e^{-2\pi i n y} dy = 1 \Rightarrow T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x}$$