Wykład XI i XII

- Transformata Fouriera dla funkcji i transformata odwrotna,
- Właściwości transformat Fouriera dla funkcji,
- Transformata Fouriera dla dystrybucji,
- Transformaty najważniejszych dystrybucji,
- Transformata Fouriera-Bessela (Hankela),
- Transformaty trójwymiarowe.

Transformata Fouriera dla funkcji

$$\boxed{\hat{\varphi}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\varphi(x)dx}$$

Uwaga: żeby powyższa definicja miała sens, musi zachodzić $\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=0$

Transformata odwrotna

Dwukrotne zastosowanie transformaty Fouriera daje

$$\hat{\hat{\varphi}}(k)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-ikx}\int_{-\infty}^{\infty}dye^{-ixy}\varphi(y)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}e^{-\varepsilon^2x^2}=1\Rightarrow\hat{\hat{\varphi}}(k)=\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}dy\varphi(y)\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\varepsilon^2\left[x^2+ix(k+y)/\varepsilon^2\right]}$$

$$e^{-\varepsilon^2\left[x^2+ix(k+y)/\varepsilon^2\right]}=e^{-\varepsilon^2\left[x+i(k+y)/2\varepsilon^2\right]^2}e^{-(k+y)^2/4\varepsilon^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(x-z)^2}dx=\sqrt{\pi/a}$$

$$\Rightarrow\hat{\hat{\varphi}}(k)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi^2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}dy\varphi(y)e^{-(k+y)^2/4\varepsilon^2}$$

Ciąg deltopodobny $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon^2}}=\delta(x)\Rightarrow\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\varepsilon}e^{-\frac{(k+y)^2}{4\varepsilon^2}}=\delta(y+k)$

$$\Rightarrow\hat{\hat{\varphi}}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\delta(y+k)\varphi(y)=\frac{1}{2\pi}\varphi(-k)\quad\boxed{\Rightarrow\varphi(k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\hat{\varphi}(x)dx}$$

Definicja transformaty odwrotnej

Pochodna transformaty

$$\hat{\varphi}^{(n)}(k)=(-i)^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{-ikx}\varphi(x)dx=(-i)^n\left(x^n\varphi\right)^{\wedge}$$

Transformata pochodnej

$$\left[\varphi^{(n)}\right]^{\wedge}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\varphi^{(n)}(x)dx=(ik)^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\varphi(x)dx=(ik)^n\hat{\varphi}(k)$$

Całkujemy n-krotnie przez części, pamiętając że $\varphi(x\to\pm\infty)=0\Rightarrow\varphi^{(l)}(x\to\pm\infty), l=1,2,3\ldots n$

Transformata iloczynu dwóch funkcji

Analogicznie jak dla transformaty odwrotnej można pokazać że

$$\boxed{\left[\varphi_1\varphi_2\right]^{\wedge}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}_1(k_1)\hat{\varphi}_2(k-k_1)dk_1=\left[\hat{\varphi}_1*\hat{\varphi}_2\right](k)}$$

- Transformata iloczynu dwóch funkcji jest równa splotowi transformat

Transformata splotu dwóch funkcji

$$\boxed{\begin{aligned}[\varphi_1 * \varphi_2]^{\wedge}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\int_{-\infty}^{\infty} dy\,\varphi_1(x-y)\varphi_2(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky}\varphi_2(y)\int_{-\infty}^{\infty} d(x-y) e^{-ik(x-y)}\varphi_1(x-y) = 2\pi\hat{\varphi}_1(k)\hat{\varphi}_2(k)\end{aligned}}$$

- Transformata splotu dwóch funkcji jest równa iloczynowi transformat pomnożonemu przez 2π

Iloczyn skalarny transformat

Analogicznie jak dla transformaty odwrotnej można pokazać że

$$(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{\varphi}_1}(k)\hat{\varphi}_2(k)dk = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx}\overline{\varphi_1}(x)\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky}\varphi_2(y) = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1,\varphi_2)$$

Kreska oznacza sprzężenie zespolone

Transformata funkcji przesuniętej

$$\hat{\varphi}_a(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\varphi(x-a) = e^{-ika}\int_{-\infty}^{\infty} d(x-a)e^{-ik(x-a)}\varphi(x-a) = e^{-ika}\hat{\varphi}(k)$$

Transformata funkcji parzystej i nieparzystej

Niech funkcja ϕ ma określoną parzystość, $\varphi(-x)=\pm\varphi(x)$

$$\hat{\varphi}(-k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{ikx}\varphi(x)=\left|\begin{matrix}y=-x\\ dy=-dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dye^{-iky}\varphi(-y)=\pm\hat{\varphi}(k)$$

$$\hat{\varphi}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{ikx}\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\cos(kx)\varphi(x)-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\sin(kx)\varphi(x)$$

$$\varphi(-x)=\varphi(x)\Rightarrow\hat{\varphi}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\cos(kx)\varphi(x)$$

$$\varphi(-x)=-\varphi(x)\Rightarrow\hat{\varphi}(k)=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\sin(kx)\varphi(x)$$

- Transformata funkcji parzystej jest funkcją parzystą i czysto rzeczywistą
- Transformata funkcji nieparzystej jest funkcją nieparzystą i czysto zespoloną

Transformata Fouriera dla dystrybucji

- Transformatą Fouriera dystrybucji T nazywamy dystrybucję $\hat{T}$, spełniającą tożsamość

$$\boxed{\left\langle \hat{T},\varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(k)\varphi(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\hat{\varphi}(x)dk = \left\langle T,\hat{\varphi} \right\rangle}$$

Jeżeli T jest funkcją całkowalną, powyższa definicja pokrywa się z definicją transformaty Fouriera dla funkcji

$$T = f \Rightarrow \left\langle f,\hat{\varphi} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dxf(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dke^{-ixk}\varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\varphi(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-ikx} f(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k)\hat{f}(k)dk = \left\langle \hat{f},\varphi \right\rangle$$

Transformaty najważniejszych dystrybucji

- Transformata delty Diraca

$$\left\langle \hat{\delta},\varphi\right\rangle = \left\langle \delta,\hat{\varphi}\right\rangle = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\cdot 0\cdot k}\varphi(k)dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\varphi(k)dk = \frac{1}{2\pi}\left\langle 1,\varphi\right\rangle \Rightarrow \boxed{\hat{\delta} = \frac{1}{2\pi}}$$

- Transformata funkcji stałej

Odwracając powyższy wzór otrzymujemy $1 = 2\pi\hat{\delta} \Rightarrow \boxed{\hat{1} = \delta}$

Stąd tzw. całkowe przedstawienie delty Diraca

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot e^{-ixk}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk}$$

Bardzo ważny, chociaż nieformalny wzór, wykorzystywany powszechnie w fizyce ciała stałego, kwantowej teorii pola, optyce dyfrakcyjnej…

- Transformata potęgi

$$\left\langle \left[x^n\right]^\wedge,\varphi\right\rangle = \left\langle x^n,\hat{\varphi}(x)\right\rangle = \left\langle 1, x^n\hat{\varphi}(x)\right\rangle = (-i)^n\left\langle 1,(ix)^n\hat{\varphi}(x)\right\rangle = (-i)^n\left\langle 1,\left[\varphi^{(n)}\right]^\wedge\right\rangle$$

$$= (-i)^n\left\langle \hat{1},\varphi^{(n)}\right\rangle = (-i)^n\left\langle \delta,\varphi^{(n)}\right\rangle = (-i)^n\left\langle (-1)^n\delta^{(n)},\varphi\right\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[x^n\right]^\wedge = i^n\delta^{(n)}}$$

Widać, że w **sensie dystrybucyjnym transformatę można obliczać nawet dla funkcji, które nie mają transformaty w sensie dystrybucyjnym** (x^n nie znika w nieskończoności!)

Transformata dystrybucji przesuniętej

- Dystrybucja przesunięta T_a

$$\langle T_a,\varphi(x-a)\rangle=\langle T(x-a),\varphi(x-a)\rangle=\langle T(x),\varphi(x)\rangle=\langle T,\varphi\rangle$$

Przykład $\langle \delta_a,\varphi(x-a)\rangle=\langle \delta(x-a),\varphi(x-a)\rangle=\varphi(a-a)=\varphi(0)=\langle \delta(x),\varphi(x)\rangle=\langle \delta,\varphi\rangle$

- Transformata Fouriera dystrybucji przesuniętej

$$\left\langle \hat{T}_a(k),\varphi(k)\right\rangle=\langle T(x-a),\hat{\varphi}(x)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}T(x-a)\hat{\varphi}(x)dx=\left|y=x-a\right|$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}T(y)\hat{\varphi}(y+a)dx=\langle T(y),\hat{\varphi}(y+a)\rangle$$

$$\hat{\varphi}(y+a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(y+a)x}\varphi(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iyx}\left[e^{-iax}\varphi(x)\right]dx=\left[e^{-iax}\varphi(x)\right]^{\wedge}(y)$$

$$\Rightarrow\left\langle \hat{T}_a(k),\varphi(k)\right\rangle=\left\langle T(y),\left[e^{-iax}\varphi(x)\right]^{\wedge}(y)\right\rangle=\left\langle \hat{T}(k),e^{-iak}\varphi(k)\right\rangle=\left\langle e^{-iak}\hat{T}(k),\varphi(k)\right\rangle$$

$$\Rightarrow\boxed{\hat{T}_a(k)=e^{-iak}\hat{T}(k)}$$

Przykład $\hat{\delta}_a=\frac{1}{2\pi}e^{-ika}$

- Transformaty funkcji trygonometrycznych

$$\left\langle [\sin x]^{\wedge}(k), \varphi(k) \right\rangle = \left\langle \sin x, \hat{\varphi}(x) \right\rangle = \frac{1}{2i}\left\langle e^{ix}, \hat{\varphi}(x) \right\rangle - \frac{1}{2i}\left\langle e^{-ix}, \hat{\varphi}(x) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2i}\left\langle 1, e^{ix}\hat{\varphi}(x) \right\rangle - \frac{1}{2i}\left\langle 1, e^{-ix}\hat{\varphi}(x) \right\rangle = \frac{1}{2i}\left\langle 1, \hat{\varphi}(x+1) \right\rangle - \frac{1}{2i}\left\langle 1, \hat{\varphi}(x-1) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2i}\left\langle \hat{1}, \varphi(k+1) \right\rangle - \frac{1}{2i}\left\langle \hat{1}, \varphi(k-1) \right\rangle = \frac{1}{2i}\left\langle \delta(k), \varphi(k+1) \right\rangle - \frac{1}{2i}\left\langle \delta(k), \varphi(k-1) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2i}\left\langle \delta(k-1), \varphi(k) \right\rangle - \frac{1}{2i}\left\langle \delta(k+1), \varphi(k) \right\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{[\sin x]^{\wedge}(k) = \frac{1}{2i}\left[\delta(k-1) - \delta(k+1)\right]}$$

Analogicznie $\boxed{[\cos x]^{\wedge}(k) = \frac{1}{2}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right]}$

Uwaga: nieformalnie

$$\left[e^{\pm ix}\right]^{\wedge}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k\pm 1)x}dx = \delta(k \pm 1), \quad \text{itd.}$$

- Transformata funkcji schodkowej Heaviside'a $\Theta(x)=\frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn} x)$

$$\left\langle [\operatorname{sgn}]^{\wedge},\varphi\right\rangle=\left\langle \operatorname{sgn},\hat{\varphi}\right\rangle=\lim_{A\to\infty}\left[\left(-\int_{-A}^{0}+\int_{0}^{A}\right)dk\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-ikx}\varphi(x)\right]$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left[\left(-\int_{-A}^{0}+\int_{0}^{A}\right)dk\,\frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-ikx}\varphi(x)\right]=\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}P\int_{-\infty}^{\infty}dx\varphi(x)\left[\left(-\int_{-A}^{0}+\int_{0}^{A}\right)dke^{-ikx}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}P\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{\varphi(x)}{-ix}\left[-2+2\frac{e^{ixA}+e^{-ixA}}{2}\right]=\frac{1}{i\pi}\lim_{A\to\infty}P\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{\varphi(x)}{x}\left[1-\cos(xA)\right]$$

$$\lim_{A\to\infty}P\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{\varphi(x)\cos(xA)}{x}=\left|\begin{array}{c}y=xA\\ dx=dy/A\end{array}\right|=\lim_{A\to\infty}P\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\frac{\varphi\left(\frac{y}{A}\right)\cos(y)}{y}$$

$$=\varphi(0)P\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\frac{\cos(y)}{y}=0\Rightarrow\left\langle [\operatorname{sgn}]^{\wedge},\varphi\right\rangle=\frac{1}{i\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{\varphi(k)}{k}=\frac{1}{i\pi}\left\langle P\frac{1}{k},\varphi\right\rangle$$

$$[\operatorname{sgn}]^{\wedge}(k)=\frac{1}{i\pi}P\frac{1}{k}\Rightarrow\boxed{\hat{\Theta}(k)=\frac{1}{2}\left(\hat{1}+[\operatorname{sgn}]^{\wedge}\right)=\frac{1}{2}\delta(k)-\frac{i}{2\pi}P\frac{1}{k}}$$