# *Notatki z ćwiczeń z MMF 19/20* [1]

*Andrzej Krawiecki, Monika Petelczyc, Grzegorz Siudem*

*15 lutego 2021*

[1] Złożono w klasie `tufte-handout`, `www.ctan.org/pkg/tufte-latex`

Notatki z ćwiczeń z Metod Matematycznych Fizyki. Polecanym źródłem teorii jest [1]. Plik na bieżąco aktualizowany. Zgłoszenie każdego błędu będzie bardzo mile widziane.

Materiał do każdych zajęć przedstawiony jest w tej samej formie:

- treść zadań,
- wskazówki rozwiązań,
- odpowiedzi,
- rozwiązania.

Zachęcamy do samodzielnego (lub opartego o wskazówki) rozwiązania, a **dopiero po podjęciu jego próby** sprawdzenia odpowiedzi lub rozwiązań.

---

## *Spis treści*

## C1: Równania różnicowe

### C1: Równania różnicowe: treść zadań.

1. Rozwiązać równania różnicowe pierwszego rzędu:

(a) $$y_{n+1} - y_n = 1, \qquad y_1 = 1,$$

(b) $$y_{n+1} - n y_n = n!, \qquad y_1 = 1,$$

2. Rozwiązać równania różnicowe drugiego rzędu:

(a) $$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = 2,$$

(b) $$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \qquad F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

(c) $$y_n^2 - y_{n-1} \cdot y_{n+1} = 0, \qquad y_0 = 4, \quad y_1 = 1,$$

3. Rozwiązać równanie $y(n) = y(n/2) + n, \quad y(1) = 3.$

4. Obliczyć wyznacznik $D_n$ zdefiniowany jako:

$$D_n = \det \left[ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix}_{n \times n} \right].$$

## *C1: Równania różnicowe: wskazówki*

1.

(a) Proste rozwiązanie iteracyjne.

Proszę rozpisać równanie $y_{n+1} = 1 + y_n = 1 + (1 + y_{n-1}) + \dots$

(b) Równanie różnicowe rzędu pierwszego w ogólnej postaci

$$y_{n+1} - a_n y_n = b_n$$

rozwiązuje się, sprowadzając je do postaci znanej z punktu (a), przez podzielenie stronami przez $\prod_{i=0}^{n} a_i$ i podstawienie

$$z_0 = y_0,\ z_n = y_n \left( \prod_{i=0}^{n-1} a_i \right)^{-1},\ n = 1, 2, 3 \dots$$

W ten sposób otrzymujemy równanie na $z_n$ w postaci

$$z_{n+1} - z_n = c_n,\ n = 1, 2, 3 \dots$$

gdzie $c_n = b_n / \prod_{i=0}^{n} a_i$.
W szczególności tutaj należy podzielić równanie przez $n!$ i podstawić $z_n = y_n/(n-1)!$

Rozwiązanie równania jest prostym szeregiem iteracyjnym $z_{n+1} = z_n + c_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, stąd $y_n = z_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i$.

2. Rozwiązania równania różnicowego drugiego rzędu

$$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

poszukujemy w postaci $x_n = \lambda^n$. Jeżeli $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (rzeczywiste lub zespolone) rozwiązanie równania różnicowago ma postać

$$x_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n,$$

W obu przypadkach stałe $A$, $B$ wyznacza się z warunków początkowych. Jak widać, metoda rozwiązywania równań różnicowych z wykorzystaniem równania charakterystycznego podobna jest do metody używanej przy rozwiązywaniu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.

Po wstawieniu do równania otrzymujemy równanie charakterystyczne na $\lambda$ w postaci $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Jest to równanie drugiego stopnia, którego pierwiastkami są $\lambda_1$, $\lambda_2$ (dwa pierwiastki rzeczywiste lub jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny lub para pierwiastków zespolonych, wzajemnie sprzężonych).
Jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, rozwiązanie ma postać $x_n = (A + Bn)\lambda^n$.

(a) Patrz ogólna wskazówka powyżej.

(b) $(F_n)$ jest ciągiem Fibonacciego.

(c) Zlogarytmować równanie i potem podstawić $z = \ln(y)$.

3. Podstawić $n = 2^k$, po czym rozwiązać równanie na $y_k = y(2^k)$.

4. Należy rozwinąć wyznacznik względem pierwszego wiersza lub kolumny i zauważyć, że w ten sposób otrzymuje się równanie różnicowe na $D_n$ w postaci

$$D_n^2 - 4D_{n-1} + D_{n-2} = 0.$$

Warunki początkowe wynikają z ogólnej postaci wyznacznika dla $n = 1$ i $n = 2$, tj. $D_1 = 1$, $D_2 = 12$.

Przy rozwiązywanou równania dla ułatwienia obliczeń wygodnie jest dokonać podstawienia $2\cosh\phi = 4 \Rightarrow \mathrm{arcosh}\phi = 2$.

Stąd $\cosh\phi = 2$, $\sinh\phi = 3$.

*C1: Równania różnicowe: odpowiedzi.*

1.

(a) $y_n = n$

(b) $y_n = n!$

2.

(a) $x_n = 2^n$

(b) $F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n]$

(c) $y_n = 4^{1-n}$

3. $y(n) = 2n + 1$

4. $D_n = \frac{\sinh[(n+1)\phi]}{\sinh\phi}$, gdzie $\sinh\phi = \sqrt{3}$

*C1: Równania różnicowe: rozwiązania.*

1.

(a) $y_{n+1} = y_n + 1 \Rightarrow y_2 = y_1 + 1, y_3 = y_2 + 1 = y_1 + 2, \ldots$ $y_n = y_1 + (n-1)$. Z warunku początkowego $y_1 = 1 \Rightarrow y_n = n$.

(b) $a_n = n \Rightarrow \prod_{i=0}^{n} a_i = n!$. Podstawiając $z_n = y_n/(n-1)!$ otrzymujemy

$$z_{n+1} - z_n = 1,\ z_1 = y_1 = 1,$$

więc zgodnie z (a) mamy $z_n = n$, $y_n = n(n-1)! = n!$.

2.

(a) Postać ogólna rozwiązania

$$x_n = 3^n A + 2^n B,$$

z warunków początkowych $x_0 = 1 = A + B$, $x_1 = 2 = 3A + 2B$ $\Rightarrow A = 0, B = 1 \Rightarrow x_n = 2^n$.

Równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

co prowadzi do $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

(b) Postać ogólna rozwiązania

$$F_n = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

z warunków początkowych

$$\begin{cases} F_0 = 0 = A + B, \\ F_1 = 1 = A\frac{1-\sqrt{5}}{2} + B\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = -1/\sqrt{5}, \\ B & = 1/\sqrt{5}, \end{cases},$$

co prowadzi do $F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n]$.

Równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

co prowadzi do $\lambda_1 = (1-\sqrt{5})/2$, $\lambda_2 = (1+\sqrt{5})/2$.

(c) Logarytmując równanie obustronnie otrzymujemy

$$\ln y_{n+1} - 2\ln y_n + \ln y_{n-1} = 0.$$

Podstawiając dalej $z_n = \ln y_n$ otrzymujemy równanie na $z_n$ w postaci

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} = 0,\ z_0 = \ln y_0 = \ln 4,\ z_1 = \ln y_1 = \ln 1 = 0$$

Postać ogólna rozwiązania $z_n = (A + Bn)1^n = A + Bn$, a końcowe rozwiązanie $y_n = 4^{1-n}$.

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ ma pierwiastek podwójny $\lambda = 1$.

A z warunków początkowych $z_0 = \ln 4 = A$, $z_1 = 0 = A + B \Rightarrow A = \ln 4$, $B = -\ln 4 \Rightarrow z_n = (1-n)\ln 4 = \ln 4^{1-n} = \ln y_n$.

3. Niech $y_k \equiv y(2^k) \Rightarrow y_k - y_{k-1} = 2^k$, $y_0 = 3$. Ogólne wyrażenie iteracyjne ma więc postać $y_k = y_{k-1} + 2^k$, $k = 1, 2, 3 \ldots$. Stąd $y_1 = y_0 + 2^1 = y_0 + 2$, $y_2 = y_1 + 2^2 = y_0 + 2^1 + 2^2, \ldots, y_k = y_0 + 2^1 + 2^2 + \ldots 2^k$. Sumując ciąg geometryczny, otrzymujemy

$n = 2^k \Rightarrow y(2^k) = y(2^{k-1}) + 2^k$, $y(1) = y(2^0) = 3$.

$$y_k = y_0 + 2\frac{1-2^k}{1-2} = y_0 + 2(2^k - 1) = 3 + 2(2^k - 1) = 2^{k+1} + 1$$

$$\Rightarrow y_k = y(2^k) = 2 \cdot 2^k + 1 \Rightarrow y(n) = 2n + 1.$$

4. Rozważmy ogólniejszy wyznacznik z $x \in \mathbb{R}$,

$$D_n = \det \left[ \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{n \times n} \right].$$

Rozwijając powyższy wyznacznik względem pierwszego wiersza, otrzymujemy

$$D_n = x\det \left[ \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \right] + (-1)^3 \det \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \right].$$

Pierwszy wyznacznik w powyższym równaniu wynosi $D_{n-1}$
Rozwijajmy drugi wyznacznik względem pierwszej kolumny

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \right] = \det \left[ \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x & \end{pmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} \right] = D_{n-2}.$$

Stąd otrzymujemy równanie różnicowe na $D_n$,

$$D_n - xD_{n-1} + D_{n-2} = 0.$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci $D_n = \lambda^n$, skąd otrzymujemy równanie charakterystyczne,

Warunki początkowe są znane z ogólnej postaci wyznaczników $D_n$, mianowicie $D_1 = x$, $D_2 = \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 1$.

$$\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0, \;\; \Delta = x^2 - 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Rightarrow D_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

(1) Rozpatrzmy przypadek $\Delta > 0$ ($x = 4 \Rightarrow \Delta = 12 > 0$) oraz $x > 2$. W celu uproszczenia obliczeń dokonajmy podstawienia $x = 2\cosh\phi \Rightarrow \phi = \operatorname{arcosh}(x/2)$, $\phi > 0$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{2\cosh\phi - \sqrt{4\cosh^2\phi - 4}}{2} = \cosh\phi - \sqrt{\cosh^2\phi - 1} = \cosh\phi - \sinh\phi = e^{-\phi} \\
\lambda_2 &= e^{\phi} \\
D_1 &= 2\cosh\phi = e^{\phi} + e^{-\phi} = Ae^{-\phi} + Be^{\phi} \\
D_2 &= 4\cosh^2\phi - 1 = e^{2\phi} + e^{-2\phi} + 1 = Ae^{-2\phi} + Be^{2\phi}
\end{aligned}$$

Stąd $A = e^{-2\phi}/(e^{-2\phi} - 1)$, $B = e^{2\phi}/(e^{2\phi} - 1)$,

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{e^{-2\phi}}{e^{-2\phi} - 1}e^{-n\phi} + \frac{e^{2\phi}}{e^{2\phi} - 1}e^{n\phi} = -\frac{e^{-(n+2)\phi}}{e^{-\phi}(e^{\phi} - e^{-\phi})} + \frac{e^{(n+2)\phi}}{e^{\phi}(e^{\phi} - e^{-\phi})} \\
&= \frac{e^{(n+1)\phi} - e^{-(n+1)\phi}}{e^{\phi} - e^{-\phi}} = \frac{\sinh[(n+1)\phi]}{\sinh\phi}
\end{aligned}$$

Przy czym $x = 2\cosh\phi = 4 \Rightarrow \cosh\phi = 2 \Rightarrow \sinh\phi = \sqrt{\cosh^2\phi - 1} = \sqrt{3}$.

(2) Jeżeli $\Delta > 0$, $x < -2$, można dokonać podstawienia $x = -2\cosh\phi$, $\phi > 0$. Powtarzając rozumowanie z punktu (1), otrzymujemy

$$D_n = (-1)^n \frac{\sinh[(n+1)\phi]}{\sinh\phi}.$$

(3) Jeżeli $\Delta < 0$, tj. $-2 < x < 2$, można dokonac podstawienia $x = 2\cos\phi$, $\phi \in (0, \pi)$ (por. rozdział D.2 w skrypcie). Powtarzając rozumowanie z punktu (1), otrzymujemy

$$D_n = \frac{\sin[(n+1)\phi]}{\sin\phi}.$$

(4) Jeżeli $\Delta = 0$, $x = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda = 1$. Rozwiązanie ogólne ma postać $D_n = (A + Bn)\lambda^n = A + Bn$. Z warunków początkowych $D_1 = x = 2 = A + B$, $D_2 = x^2 - 1 = 3 = A + 2B$, stąd $A = B = 1$, $D_n = n + 1$.

(5) Jeżeli $\Delta = 0$, $x = -2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda = -1$. Rozwiązanie ogólne ma postać $D_n = (A + Bn)\lambda^n = (-1)^n(A + Bn)$. Z warunków początkowych $D_1 = x = -2 = -A - B$, $D_2 = x^2 - 1 = 3 = A + 2B$, stąd $A = B = 1$, $D_n = (-1)^n(n + 1)$.

## C2: Funkcje zespolone

### C2: Funkcje zespolone: treść zadań

1. Znaleźć graficznie liczby dla $z^3$, $\sqrt[3]{z}$, $\ln z$ dla

   (a) $$z = (-4, 0) = -4,$$

   (b) $$z = (1, \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}\, i,$$

2. Rozwiązać równania na $x$:

   Przyjmijmy, że $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $$e^{ix} = 1,$$

   (b) $$e^{ix} = -1,$$

   (c) $$e^{ix} = i,$$

3. Wyrazić przez „zwykłe" funkcje trygonometryczne/hiperboliczne następujące wyrażenia:

   (a) $$\sin(ix),$$

   (b) $$\cos(ix),$$

   (c) $$\mathrm{tg}(ix),$$

   (d) $$\sinh(ix),$$

   (e) $$\cosh(ix),$$

   (f) $$\mathrm{tgh}(ix),$$

4. Oszacować wartość wyrażenia $W = |\sin(i + \pi/4)|$.

5. Znaleźć obraz odcinka $L$ przy odwzorowaniu $F(z)$, jeśli:

   (a) $F(z) = e^z$, $L$ – odcinek $AB$, $A = (1, 0)$, $B = (1, \pi)$,

   (b) $F(z) = e^z$, $L$ – prosta o równaniu $y = \pi/2$,

   (c) $F(z) = e^{iz}$, $L$ – odcinek $AB$, $A = (\pi, 0)$, $B = (\pi, 1)$,

   (d) $F(z) = i\bar{z}$, $L$ – oś $OY$,

6. Stosując metodę funkcji zespolonych rozwiązać równanie:

$$x''' + 2\gamma x' + \beta x = F \cos(\omega t),$$

7. Obliczyć całki:

   (a) $$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin\varphi} d\varphi,$$

   (b) $$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 4} dx,$$

   (c) $$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i)^2} dx,$$

## C2: Funkcje zespolone: wskazówki

1. Zapisz liczby zespolone w postaci wykładniczej (por. str. 87)

   Przypominamy, że
   $$x + i\,y = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{i \arctan(y/x)}.$$

   (a) $-4 + 0i = 4\, e^{i\pi}$
   (b) $1 + \sqrt{3}i = 2\, e^{i\pi/3}$

2. Skorzystaj ze wzoru Eulera $e^{ix} = \cos(x) + i\, \sin(x)$.

3. Najpierw udowodnij, że dla $z \in \mathbb{C}$ zachodzą relacje

   Sugerujemy rozwinąć w szereg lewą i prawą stronę każdego równania.

   $$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

   a następnie dodawaj lub odejmuj je stronami.

   Pamiętając, że
   $$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ i } \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

4. Skorzystaj ze wzoru na $\sin(z)$ ze wskazówki do Zadania 3.

5. Zapisz liczby $z \in L$ parametrycznie:

   (a) $z = 1 + i\beta$, $\beta \in [0,\, \pi]$.
   (b) $z = \alpha + i\pi/2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (c) $z = \pi + i\beta$, $\beta \in [0,\, 1]$.
   (d) $z = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

6. Dopisz równanie na $y$ postaci

   Przyjmij, że $z(t) = x(t) + iy(t)$.

   $$y''' + 2\gamma y' + \beta y = F \sin(\omega t),$$

7. Wyraź wyjściowe całki przez całki zespolone po odpowiednich konturach, a następnie skorzystaj ze wzoru Cauchy'ego.

   (a) Dokonaj podstawienia $z = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Stąd
   $$dz = ie^{i\phi} d\phi = izd\phi,$$
   więc $d\phi = \frac{1}{iz} dz$. Ze wzoru Eulera $\sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$

   Jak widać, $z$ leżą na okręgu $O((0,0),1)$, który jest w związku z tym konturem całkowania, $\Gamma = O((0,0),1)$

   (b) Dopisz drugą całkę $I_2' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+4} dx$ i oblicz $I_2 + iI_2'$, korzystając z lematu Jordana.

   (c) Kontur to *nieskończony* prostokąt o dłuższych bokach danych osiami $OX$ oraz $i + \mathbb{R}$.

   Należy znaleźć wartośc całki po konturze skończonego prostokąta i, przechodząc do granicy, pokazać, że całki na krótszych bokach zbiegają do zera, a całka po $\mathbb{R}$ powinna być Państwu znana.

*C2: Funkcje zespolone: odpowiedzi*

1.

(a) $z^3 = -64$, $\sqrt[3]{z} \in \{-2^{2/3}, (1+i\sqrt{3})2^{-1/3}, (1-i\sqrt{3})2^{-1/3}\}$, $\ln z \in \{2\ln(2) + i\pi(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $z^3 = -8$, $\sqrt[3]{z} \in \{2^{1/3}e^{i\pi/9}, 2^{1/3}e^{7i\pi/9}, 2^{1/3}e^{13i\pi/9}\}$, $\ln z \in \{\ln(2) + i\pi(2k+\frac{1}{3}) : k \in \mathbb{Z}\}$.

2.

(a) $x = 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $x = (2k+1)\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $x = (2k+1/2)\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

3.

(a) $\sin(ix) = i\sinh(x)$,

(b) $\cos(ix) = \cosh(x)$,

(c) $\mathrm{tg}(ix) = i\,\mathrm{tgh}(x)$,

(d) $\sinh(ix) = i\sin(x)$,

(e) $\cosh(ix) = \cos(x)$,

(f) $\mathrm{tgh}(ix) = i\,\mathrm{tg}(x)$.

4. $W = \frac{\sqrt{1+e^4}}{2e}$.

5.(a) Półokrąg o środku $(0,0)$ i promieniu $e$ w górnej półpłaszczyźnie, $F(z) = \left\{(x,y) : x^2+y^2 = e^2, y \geq 0\right\}$

(b) Dodatnia półoś zespolona, $F(z) = \{(x,y) : x = 0, y \in (0,\infty)\}$

(c) Odcinek $(-1, -e^{-1})$, $F(z) = \left\{(x,y) : x \in (-1, -e^{-1}), y = 0\right\}$

(d) Oś rzeczywista, $F(z) = \{(x,y) : x \in (-\infty,\infty), y = 0\}$

6. $x(t) = F\frac{\beta cos(\omega t) + (2\gamma\omega - \omega^3) sin(\omega t)}{\beta^2 + (2\gamma\omega - \omega^3)^2}$

7.

(a) $I_1 = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$.

(b) $I_2 = \frac{\pi e^{-2}}{2}$.

(c) $I_3 = \sqrt{\pi}$

## *C2: Funkcje zespolone: rozwiązania*

1. Dla liczby postaci $z = re^{i\varphi}$ mamy:

$$\begin{aligned} z^3 &= r^3 e^{3i\varphi}, \\ \sqrt[3]{z} &\in \{\sqrt[3]{r}e^{i\varphi/3}, \sqrt[3]{r}e^{i\varphi/3+2i\pi/3}, \sqrt[3]{r}e^{i\varphi/3+4i\pi/3}\}, \\ \ln(z) &\in \{\ln(r) + i\varphi + 2i\pi k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

2. Korzystamy ze wzoru Eulera:

   (a) $\cos(x) + i\sin(x) = 1 \;\Rightarrow\; \cos(x) = 1 \wedge \sin(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$

   (b) $\cos(x) + i\sin(x) = -1 \;\Rightarrow\; \cos(x) = -1 \wedge \sin(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = (2k+1)\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$

   (c) $\cos(x) + i\sin(x) = i \;\Rightarrow\; \cos(x) = 0 \wedge \sin(x) = 1 \;\Rightarrow\; x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$

3. Rozważmy funkcje trygonometryczne:

Dla funkcji hiperbolicznych rachunki są analogiczne.

$$\begin{aligned} \sin(iz) &= \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = \frac{-1}{i}\sinh(z) = i\sinh(z), \\ \cos(iz) &= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh(z), \\ \mathrm{tg}(iz) &= \frac{\sin(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i\sinh(z)}{\cosh(z)} = i\,\mathrm{tgh}(z) \end{aligned}$$

4. Rozpisujemy funkcję sin zgodnie ze wskazówką

Zauważamy, że

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} W &= \left|\frac{e^{-1+i\pi/4} - e^{1-i\pi/4}}{2i}\right| = \\ &= \left|\frac{[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)]\,e^{-1} - [\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)]\,e^{1}}{2i}\right| = \\ &= \left|\frac{\sqrt{2}}{4i}\left(e^{-1} + ie^{-1} - e + ie\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}\left|-ie^{-1} + e^{-1} + ie + e\right| = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\cosh(1) + i\sinh(1)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\cosh(1) + i\sinh(1)\right| = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cosh^2(1) + \sinh^2(1)} = \frac{\sqrt{1+e^4}}{2e} \end{aligned}$$

5.

   (a) $F(z) = F(1 + i\beta) = e^z = e^{1+i\beta} = ee^{i\beta},$ $\beta \in [0, \pi].$

   (b) $F(z) = F(\alpha + i\pi/2) = e^z = e^{\alpha+ipi/2} = e^{\alpha}e^{i\pi/2} = ie^{\alpha},$ $\alpha \in (-\infty, \infty).$

   (c) $F(z) = F(\pi + i\beta) = e^{iz} = e^{i\pi-\beta} = e^{i\pi}e^{-\beta} = -e^{-\beta},$ $\beta \in (0, 1).$

   (d) $F(z) = F(i\beta) = i\bar{z} = i\overline{i\beta} = i(-i\beta) = \beta,$ $\beta \in (-\infty, \infty).$

6. TBA

7.

(a) Dokonujemy podstawienia jak we wskazówce $z = e^{i\phi}$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2+\sin\phi} = \oint_\Gamma \frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = 2\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2+4iz-1}$$

Znajdujemy bieguny funkcji podcałkowej:

$$z_1 = -(2+\sqrt{3})i,\ z_2 = -(2-\sqrt{3})i,$$

A konturem całkowania jest okrąg jednostkowy $O((0,0),1)$.

$|z_1| > 1$, więc biegun $z_1$ leży na zewnątrz konturu całkowania $\Gamma$, $|z_2| < 1$, więc tylko biegun $z_2$ leży wewnątrz konturu całkowania $\Gamma$.

Dalej licxzymy residuum w punkcie $z_2$ (por. komentarz)

$$\operatorname{res}_{z_2}\left(\frac{1}{z^2+4iz-1}\right) = \lim_{z\to z_2} \frac{z+(2-\sqrt{3})i}{\left[z+(2+\sqrt{3})i\right]\left[z+(2-\sqrt{3})i\right]} =$$
$$= \lim_{z\to z_2}\frac{1}{z+(2+\sqrt{3})i} = \frac{1}{2\sqrt{3}i},$$

Stąd natychmiast otrzymujemy wartość całki

$z_2$ jest pojedynczym biegunem pierwszego rzędu wewnątrz konturu całkowania, więc ze wzoru Cauchy'ego otrzymujemy:

$$I_1 = 2\cdot 2\pi i \operatorname{res}_{z_2}\left(\frac{1}{z^2+4iz-1}\right) = 2\cdot 2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}i} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

(b)

Na szczęście całkowanie jest liniowe, więc możemy je wykonywać przemiennie z braniem części rzeczywistej!

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{Re}\left(\frac{e^{ix}}{x^2+4}\right)dx = \mathfrak{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4}dx\right).$$

Obliczamy więc całkę zespoloną

Rozpatrzmy funkcję $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4} \equiv F(z)e^{iz}$, $F(z) \equiv \frac{1}{z^2+4}$.

Kontur całkowania $C$ jest krzywą zamkniętą złożoną z odcinka $(-R,R)$ na osi rzeczywistej i domykającego półokręgu $C_R = \{z : z = Re^{i\phi},\ \phi\in(0,\pi)\}$ w górnej półpłaszczyźnie.

$$J_R = \oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz.$$

Szacujemy wartość funkcji podcałkowej na półokręgu $C_R$:

$$|F(z)|_{C_R} = \left|\frac{1}{z^2+4}\right|_{z=Re^{i\phi}} = \frac{1}{\left|R^2e^{2i\phi}+4\right|} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\left(R^2e^{2i\phi}+4\right)\left(R^2e^{-i2\phi}+4\right)}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{R^4+4R^2\left(e^{2i\phi}+e^{-2i\phi}\right)+16}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{R^4+8R^2\cos\phi+16}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{R^4-8R^2+16}} =$$
$$= \frac{1}{R^2-4} < \frac{2}{R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Z lematu Jordana

$F(z) \xrightarrow{R\to\infty} 0$ jednostajnie na $C_R$, czyli dla $\phi\in(0,\pi)$, można więc skorzystać z lematu Jordana

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0,$$

stąd

$$\lim_{R\to\infty} J_R = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}dx$$

Bieguny $f(z)$: $z_1 = -2i$, $z_2 = 2i$, więc dla dostatecznie dużego $R$

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2=2i} \frac{(z-2i)e^{iz}}{(z-2i)(z+2i)} =$$
$$= 2\pi i \frac{e^{i(2i)}}{4i} = \frac{\pi}{2e^2}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

Bieguny są rzędu pierwszego, tylko biegun $z_2$ leży wewnątrz konturu $C$.

$$I_2 = \mathfrak{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}dx\right) = \mathfrak{Re}\left(\oint_C f(z)dz\right) = \frac{\pi}{2e^2}.$$

(c) Rozważmy prostokąt $\Gamma_R$ wyznaczony przez punkty $\{-R,\ -R+i,\ R+i,\ R\}$. Całkując po nim wyjściową funkcję otrzymujemy

Zwróćmy uwagę, że funkcja podcałkowa jest analityczna, a zatem całka ta dla każdego $R>0$ równa jest zeru.

$$\oint_{\Gamma_R} e^{-z^2}dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-(z+i)^2}dz}_{\xrightarrow{R\to\infty} I_3} + \int_1^0 e^{-(R+iu)^2}du +$$
$$+ \int_R^{-R} e^{-z^2}dz + \int_0^1 e^{-(-R+iu)^2}du = 0$$

Rozważmy normę funkcji podcałkowej dla *pionowych boków* $\Gamma_R$

Pokażemy teraz, że dla dostatecznie dużych $R$ całki postaci $\int_0^1 e^{-(\pm R+iu)^2}du$ zbiegają do zera.

$$\left|e^{-(\pm R+iu)^2}\right| = \left|e^{-R^2\mp 2iuR+u^2}\right| = \left|e^{u^2-R^2}\left[\cos(2uR)\mp i\sin(2uR)\right]\right| =$$
$$= e^{u^2-R^2}\underbrace{\sqrt{\sin^2(2uR)+\cos^2(2uR)}}_{=1} \leqslant e^{1-R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

A zatem przechodzac do granicy z $R\to\infty$ otrzymujemy

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

# C3: Funkcje Eulera

## C3: Funkcje Eulera: treść zadań.

1. Wyrazić przez funkcje Eulera, a następnie uprościć, całki:

Jak nazwalibyśmy tę całkę na Probabilistyce?

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx,$$

(b) $$\int_{0}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx,$$

(c) $$\int_{0}^{1} [-\ln(t)]^{3/2}\, dt,$$

(d) $$\int_{0}^{\pi/2} [\mathrm{tg}(t)]^{1/3}\, dt,$$

(e) $$\int_{0}^{1} \left[1-\sqrt{t}\right]^{1/3} dt,$$

(f) $$\int_{-1}^{1} (1-t)^{1/3}(1+t)^{1/2} dt,$$

2. Wyprowadzić zwarty wzór na „silnię" $\Gamma(1/2-n)$.

3. Wyznaczyć $x \in [0, N]$, dla którego $\ln\binom{N}{x}$ osiąga maksimum.

*C3: Funkcje Eulera: wskazówki.*

1.
   (a) Określ parzystość funkcji podcałkowej i rozważ najpierw podpunkt (b).
   (b) Podstaw $v = x^2$ i szukaj funkcji gamma.
   (c) Podstaw $v = -\ln(t)$ i szukaj funkcji gamma.
   (d) Podstaw $v = \mathrm{tg}(t)$, $w = v^2 + 1$, $z = w^{-1}$ i szukaj funkcji beta.
   (e) Podstaw $v = \sqrt{t}$ i szukaj funkcji beta.
   (f) Podstaw $v = \frac{1+t}{2}$ i szukaj funkcji beta.
2. Skorzystaj z relacji $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

   W przeciwną, niż zazwyczaj, stronę.
3. Wykorzystaj wzór Stirlinga.

   Najlepiej użyć wersji
   $$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \mathcal{O}\left[\ln(n)\right].$$

*C3: Funkcje Eulera: odpowiedzi.*

1.

   (a) $\frac{(-1)^n+1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

   (b) $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

   (c) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

   (d) $\frac{1}{2}\beta\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

   (e) $2\beta\left(2,\frac{4}{3}\right)=\frac{9}{14}$.

   (f) $2^{11/6}\beta\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right)=\frac{2^{5/6}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}$.

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{\sqrt{\pi}(-2)^n}{(2n-1)!!}$.

3. $x=\frac{N}{2}$.

*C3: Funkcje Eulera: rozwiązania.*

1.

(a) Zwróćmy najpierw uwagę, że parzystość funkcji jest taka sama jak parzystość liczby $n$. A zatem dla $n$ nieparzystych całka po całej osi $\mathbb{R}$ daje wynik 0, natomiast dla parzystych $n$ mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx.$$

Zwracamy uwagę, że słowo *parzystość* pojawia się w tym zdaniu dwa razy w zupełnie róznych znaczeniach!

Co sprowadza punkt (a) do punktu (b).

(b) Stosujemy podstawienie $v = x^2$, w którym $dv = 2xdx$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} v^{n/2} e^{-v} \frac{1}{2\sqrt{v}} dv = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} v^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-v} dv = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}.$$

(c) Stosujemy podstawienie $v = -\ln(t)$, w którym $dv = -dt/t$

$$\int_0^1 [-\ln(t)]^{3/2}\, dt = \int_{\infty}^0 v^{3/2}(-e^{-v}) dv = \int_0^{\infty} v^{5/2-1} e^{-v} dv = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

Zauważmy, że stosując analogiczne podstawienie łatwo można obliczyć ogólniejszą całkę $\int_0^1 [-\ln(t)]^p dt = \Gamma(p+1)$, $p \in \mathbb{R}$

Aby obliczyć dokładną wartość końcowej funkcji gamma skorzystajmy z relacji rekurencyjnej oraz faktu, że $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

(d) Stosujemy podstawienie $v = \mathrm{tg}(t)$, w którym $dv = dt/\cos^2(t)$

Zauważamy, że $v^2 + 1 = \cos^{-2}(t)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\mathrm{tg}(t)]^{1/3}\, dt = \int_0^{\infty} v^{1/3}(v^2+1)^{-1} dv = (\spadesuit),$$

gdzie podstawiamy $w = v^2 + 1$, co skutkuje $dw = 2vdv$

$$(\spadesuit) = \int_1^{\infty} (w-1)^{1/6}\, w^{-1} \frac{1}{2\sqrt{w-1}} dw = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} (w-1)^{-1/3}\, w^{-1} dw = (\clubsuit),$$

gdzie podstawiamy $z = w^{-1}$ i $dz - dw/w^2$

$$(\clubsuit) = \frac{1}{2}\int_1^0 \left(\frac{1-z}{z}\right)^{-1/3} z\,(-z^{-2})\, dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^{-1/3}\, z^{-2/3} dz = \frac{\beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}{2} = (\diamondsuit),$$

co upraszczamy korzystając z

$$(\diamondsuit) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Uwaga: Znacznie łatwiejszy sposób rozwiązania zadania polega na rozpisaniu całki tak, aby można było bezpośrednio skorzystać z definicji funkcji beta Eulera za pomocą funkcji trygonometrycznych. Ogólnie:

$\beta(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\phi)^{2x-1} (\sin\phi)^{2y-1} d\phi$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} [\mathrm{tg}(t)]^r dt &= \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{(r+1)-1} (\cos t)^{(-r+1)-1} dt \\ &= \beta\left(\frac{-r+1}{2}, \frac{r+1}{2}\right) \end{aligned}$$

(e) Stosujemy podstawienie $v = \sqrt{t}$, w którym $dv = dt/(2\sqrt{t})$

$$\int_0^1 (1-\sqrt{t})^{1/3}\, dt = \int_0^1 (1-v)^{1/3}\,(2v)dv = 2\int_0^1 v(1-v)^{1/3}\, dv = 2\,\beta\left(2, \frac{4}{3}\right)$$

Uwaga: jest to szczególny przypadek całki ($p, q, m > 0$)

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t^m)^{q-1}dt = \frac{1}{m}\beta\left(\frac{p}{m}, q\right),$$

którą można obliczyć jak wyżej, stosując ogólniejsze podstawienie $v = t^m$.

(f) Stosujemy podstawienie $v = (1+t)/2$, w którym $dv = dt/2$

Zauważmy, że $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$$\int_{-1}^1 (1-t)^{1/3}(1+t)^{1/2}\, dt = \int_0^1 (2-2v)^{1/3}\,(2v)^{1/2}\, 2dv =$$
$$= 2^{11/6}\int_0^1 (1-v)^{1/3}\, v^{1/2}\, dv = 2^{11/6}\,\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right).$$

Uwaga: jest to szczególny przypadek całki ($p, q > -1$)

$$\int_{-1} 1(1-t)^p(1+t)^q dt = 2^{p+q+1}\beta(p+1, q+1),$$

którą można obliczyć, stosując podstawienie jak wyżej.

2. Opierając się na rekurencyjnej własności funkcji gamma rozwijamy

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}-n}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-n+1\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}-n}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}-n+1}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-n+2\right) = \cdots = (\spadesuit),$$

gdzie rozpisujemy aż do uzyskania dodatnich argumentów

$$(\spadesuit) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)}\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{(-2)^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1} = (\clubsuit),$$

gdzie zauważyliśmy, że czynnik $-2$ możemy wyciągnąć z każdego czynnika iloczynu w mianowniku. Finalnie, posługując się notacją podwójnej silni otrzymujemy

$$(\clubsuit) = \frac{(-2)^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}.$$

3. Wychodząc z przybliżenia Stirlinga mamy

$$\ln\binom{N}{x} \approx \underbrace{N\ln(N) - N - (N-x)\ln(N-x) + N - x - x\ln(x) + x}_{=:f(x)},$$

co po zróżniczkowaniu po $x$ daje

$$f'(x) = -\ln(N-x) + \ln(x),$$

Pytając o maksimum $f$ szukamy wartości $x$ dla której $f'(x) = 0$

Jako proste zadanie dla Czytelnika zostawiamy sprawdzenie, że $f''(x) > 0$.

$$-\ln(N-x) + \ln(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{N}{2}.$$

## *C4: Transformacja Laplace'a*

### *C4: Transformacja Laplace'a: treść zadań.*

1. Obliczyć transformaty Laplace'a funkcji:

Transformata Laplace'a: czyli tam....

(a) $f(t) = t\sin(\omega t),$

(b) $g(t) = \sinh(\omega t),$

(c) $h(t) = \cosh(\omega t),$

2. Znaleźć funkcję $f(t)$, dla której transformata Laplace'a wynosi:.

Zauważmy, że zadanie wymaga wyznaczenia oryginału funkcji, czyli jego transformaty odwrotnej

... i z powrotem.

(a) $\widetilde{f}(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s},$

(b) $\widetilde{f}(s) = \dfrac{s^3+2s}{(s^2+1)^2},$

(c) $\widetilde{f}(s) = \dfrac{s}{s^2+4s+13},$

3. Metodą transformat Laplace'a rozwiązać równania:

Uwaga! Rozwiązywania równań różniczkowych (najczęściej pierwszego lub drugiego rzędu) to ważne zastosowanie transformat Laplace'a.

(a) $f'' + f' = t^2 + 2t, \qquad f(0) = 4, \quad f'(0) = -2,$

(b) $f'' - f' - 6f = 2, \qquad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0,$

(c) $f'' + f = t, \qquad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2,$

4. Podobną metodą rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} f' + 2g = 3t, \\ g' - 2f = 4, \end{cases} \qquad f(0) = 2, \quad g(0) = 3.$$

5. Określić przebieg natężenia prądu elektrycznego $I(t)$ w obwodzie RC podłączonym do stałego napięcia $U_0$.

Przyjąć, że początkowo kondensator nie był naładowany, czyli $Q(0) = 0$.

6. Określić przebieg natężenia prądu elektrycznego $I(t)$ w obwodzie RL podłączonym do zmiennego napięcia $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$.

Przyjąć, że $I(0) = 0$.

## *C4: Transformacja Laplace'a: wskazówki.*

1. Należy skorzystać z definicji transformaty Laplace'a

$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$

   (a) Funkcję $\sin(\omega t)$ należy zastąpić przez $e^{i\omega t}$.

   Proszę zauważyć, że dostaniemy od razu przepis na transofrmatę gdy $f(t) = t\cos(\omega t)$.

   (b) Należy skorzystać z relacji $\sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$.

   (c) Należy skorzystać z relacji $\cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$.

2. Celem jest maksymalne uproszczenie zadanych wyrażeń, a następnie wykorzystanie transformat podstawowych funkcji. **Przykład**: transformata: $\widetilde{f}(s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow$ oryginał: $f(t) = e^{-2t}$.

Poprzez ułamki proste, wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia, etc. Przy przekształceniach warto pamiętać o transformacie funkcji przesuniętej $h(t) = f(t-a)$, która $\widetilde{h}(s) = e^{-as}\widetilde{f}(s)$.

   (c) Zauważmy że transformatę Laplace'a funkcji typu $g(t) = e^{-\lambda t}\cos(\omega t)$ można łatwo obliczyć, gdyż jest to transformata funkcji $\cos(\omega t)$ od argumentu przesuniętego o $\lambda$

Anlogicznie dla funkcji, gdzie cos jest zastąpiony przez sin.

$$g(t) = e^{-\lambda t}\cos(\omega t) \;\Rightarrow\; \widetilde{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-\lambda t}\cos(\omega t) dt = \\ = \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)t}\cos(\omega t) dt = \frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2 + \omega^2},$$

$$g(t) = e^{-\lambda t}\sin(\omega t) \;\Rightarrow\; \widetilde{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-\lambda t}\sin(\omega t) dt = \\ = \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)t}\sin(\omega t) dt = \frac{\omega}{(s+\lambda)^2 + \omega^2}.$$

3. Należy zastosować transformatę do obu stron równania, rozwiązać równanie alebraiczne i wykonać transformatę odwrotną.

Pomocne mogą okazać się transformaty pochodnych: $\widetilde{f'}(s) = s\widetilde{f}(s) - f(0)$, $\widetilde{f''}(s) = s^2\widetilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$.

4. Należy stosować wskazówki z Zadania 3.

5. Należy rozpisać równanie Kirchhoffa dla obwodu RC ze stałym źródłem napięcia, a następnie rozwiązać je jak w Zadaniach 3-4.

Natężenie $I(t)$ najlepiej wyrazić jako pochodną $I(t) = \frac{dQ}{dt}$.

6. Należy rozpisać równanie Kirchhoffa dla obwodu RL ze zmiennym źródłem napięcia, a następnie rozwiązać jak poprzednio.

Ma ono postać równania różniczkowe pierwszego rzędu z warunkiem początkowym $I(0) = 0$.

*C4: Transformacja Laplace'a: odpowiedzi.*

1.

(a) $\widetilde{f}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$.

(b) $\widetilde{f}(s) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$.

(c) $\widetilde{f}(s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$.

2.

(a) $f(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$.

(b) $f(t) = \frac{t}{2}\sin(t) + \cos(t)$.

(c) $f(t) = e^{-2t}\left[\cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t)\right]$.

3.

(a) $f(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2e^{-t} + 2$.

(b) $f(t) = \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{1}{3}$.

(c) $f(t) = t + \cos(t) + \sin(t)$.

4. $f(t) = -\frac{5}{4} + \frac{13}{4}\cos(2t) - 3\sin(2t)$, $g(t) = \frac{13}{4}\sin(2t) + 3\cos(2t) + \frac{3}{2}t$.

5. $I(t) = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$.

6. $I(t) = \frac{U_0}{R^2+(L\omega)^2}\left[L\omega e^{\frac{-Rt}{L}} - L\,\omega\cos(\omega t) + R\sin(\omega t)\right]$.

*C4: Transformacja Laplace'a: rozwiązania.*

1.

(a) Zgodnie ze wskazówką liczymy transformatę funkcji $e^{i\omega t}$

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty t\sin(\omega t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty t\, \mathfrak{Im}(e^{i\omega t})\, e^{-st}\, dt \overset{\spadesuit}{=}$$

$$\overset{\spadesuit}{=} \mathfrak{Im}\left[\int_0^\infty t\, e^{-(s-i\omega)t} dt\right] \overset{\clubsuit}{=} \mathfrak{Im}\left[\underbrace{\frac{-t}{s-i\omega} e^{-(s-i\omega)t}\Big|_0^\infty}_{=0}\right] +$$

$$-\mathfrak{Im}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega} dt\right] = -\mathfrak{Im}\left[\frac{1}{(s-i\omega)^2}\right] = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

Pamiętamy przy tym w $\spadesuit$, że transformata Laplace'a, jak każda całka jest liniowa, więc możemy zamienić operacje całkowania z braniem części rzeczywistej (urojonej).

W $\clubsuit$ liczymy całkę przez części.

(b) Zgodnie ze wskazówką rozpisujemy funkcję sinh

$$\widetilde{g}(s) = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{(-s+\omega)t} dt - \int_0^\infty e^{(-s-\omega)t} dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\omega - s} - \frac{1}{\omega + s}\right] = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$

$\sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$

(c) Postępujemy analogicznie jak w punkcie (b).

Jedyna różnica to zamiana odpowiedniego znaku $-$ na $+$.

2.

(a) Sprowadzamy transformatę do sumy funkcji wymiernych

$$\widetilde{f}(s) = \frac{s+1}{s^2+2s} = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2)+Bs}{s(s+2)}$$

stąd $A = B = \frac{1}{2}$ oraz

$$\widetilde{f}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}\right) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2t}\right).$$

Porównując wyrażenia przy tych samych potęgach $s$ w liczniku, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ 2A = 1. \end{cases}$$

Korzystając z tablicy transformat Laplace'a.

(b) Podobnie jak w punkcie (a) rozpisujemy

$$\widetilde{f}(s) = \frac{s^3+2s}{(s^2+1)^2} = \frac{s^3+s+s}{(s^2+1)^2} = \frac{s(s^2+1)+s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2},$$

co prowadzi do wniosku, że

$$f(t) = \cos(t) + \frac{t\sin(t)}{2}.$$

Korzystamy z tablicy transformat Laplace'a funkcji elementarnych oraz wyniku Zadania 1. (a) (dla $\omega = 1$).

(c) Funkcja kwadratowa w mianowniku nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc wygodnie jest ją zapisać w postaci

$$\widetilde{f}(s) = \frac{s}{s^2+4s+13} = \frac{s}{(s+2)^2+3^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - \frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}.$$

Korzystając ze wskazówki do zadania otrzymujemy

$$f(t) = e^{-2t}\left[\cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t)\right].$$

3.

(a) Transformując obie strony równania, otrzymujemy

$$s^2\widetilde{f} - 4s + 2 + s\widetilde{f} - 4 = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}.$$

Wyznaczając stąd $\widetilde{f}$ otrzymujemy

Zapisując ją w postaci sumy funkcji wymiernych (por. Zadanie 2.(a))

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(s) &= \frac{2}{s^4} + \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s(s+1)} = \\ &= \frac{2}{s^4} + \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} = \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s}.\end{aligned}$$

Korzystając z tablicy transformat Laplace'a, otrzymujemy

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2e^{-t} + 2.$$

(b) Analogicznie jak w Zadaniu 3.(a) otrzymujemy

$$\tilde{f}(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s} + \frac{8}{15}\frac{1}{s-3} + \frac{4}{5}\frac{1}{s+2} \;\Rightarrow\; f(t) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}.$$

(c) Transformując obie strony równania, otrzymujemy

$$(s^2+1)\tilde{f} = \frac{1}{s^2} + s + 2 = \frac{s^2+1-s^2}{s^2} + s + 2 = \frac{s^2+1}{s^2} + s + 1$$

$$\widetilde{f}(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow f(t) = t + \cos t + \sin t$$

4. Układy równań różniczkowych rozwiązuje się analogicznie jak pojedyncze równania różniczkowe:

$$\begin{cases} s\widetilde{f} - 2 + 2\widetilde{g} = \frac{3}{s^2}, \\ s\widetilde{g} - 3 - 2\widetilde{f} = \frac{4}{s}. \end{cases}$$

Z powyższego układu równań należy wyznaczyć $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$, a następnie zapisać je w postaci sumy funkcji wymiernych

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(s) &= \frac{-5}{s(s^2+4)} + \frac{2s}{s^2+4} + \frac{-3\cdot 2}{s^2+4} = -\frac{5}{4s} + \frac{13s}{4(s^2+4)} - \frac{6}{s^2+4}, \\ \widetilde{g}(s) &= \frac{26}{4(s^2+4)} + \frac{3s}{s^2+4} + \frac{3}{2s^2}.\end{aligned}$$

Korzystając z tablicy transformat Laplace'a, otrzymujemy

$$\begin{aligned}f(t) &= -\frac{5}{4} + \frac{13}{4}\cos(2t) - 3\sin(2t) \\ g(t) &= \frac{13}{4}\sin(2t) + 3\cos(2t) + \frac{3t}{2}.\end{aligned}$$

5. Korzystając z II prawa Kirchhoffa i sumując spadki napięć na elementach obwodu do zera, otrzymujemy równanie

$$RI + \frac{Q}{C} = U_0,$$

co sprowadzamy do równania różniczkowego dla ładunku

Podstawiamy $I = \frac{dQ}{dt}$, co po podzieleniu stronami przez $R$ prowadzi do otrzymanego równania.

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{U_0}{R} \;\Rightarrow\; \left(s + \frac{1}{RC}\right)\widetilde{Q} = \frac{U_0}{R}\frac{1}{s}$$

skąd wyznaczamy $\widetilde{Q}(s) = \frac{U_0}{R}\frac{1}{s}\left(s + \frac{1}{RC}\right)^{-1}$, co prowadzi do

Z warunku początkowego $Q(0) = 0$. Ponieważ $I = \frac{dQ}{dt}$, pozostaje nam skorzystać ze wzoru na transformatę pochodnej i tablic transformat Laplace'a.

$$\widetilde{I}(s) = s\widetilde{Q}(s) - Q(0) = \frac{U_0}{R}\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \;\Rightarrow\; I(t) = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

6. Podobnie jak w zadaniu poprzednim w celu uzyskania równania różniczkowego na natężenie prądu korzystamy z II prawa Kirchhoffa i dokonujemy obustronnej transformaty Laplace'a

Z warunku początkowego $I(0) = 0$.

$$L\frac{dI}{dt} + IR = U_0 \sin\omega t \;\Rightarrow\; (sL + R)\,\widetilde{I} = U_0\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Stąd wyznaczamy $\widetilde{I}$ i zapisujemy w postaci

Porównaj Zadanie 2.

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}(s) &= \frac{U_0}{L}\frac{\omega}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s^2 + \omega^2)} = \\
&= \frac{U_0}{L}\left(\frac{\omega}{\omega^2 + R^2/L^2}\frac{1}{s + R/L} + \frac{-\omega s + \omega R/L}{\omega^2 + R^2/L^2}\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right) = \\
&= \frac{U_0 L}{\omega^2 L^2 + R^2}\left(\omega\frac{1}{s + R/L} - \omega\frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{R}{L}\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right).
\end{aligned}$$

Korzystając z tablicy transformat Laplace'a, otrzymujemy

$$I(t) = \frac{U_0 L}{\omega^2 L^2 + R^2}\left[\omega e^{-\frac{R}{L}t} - \omega\cos(\omega t) + \frac{R}{L}\sin(\omega t)\right].$$

# C5-C6: Wielomiany ortogonalne

## C5-C6: Wielomiany ortogonalne: treść zadań.

1. Dla $x \in [-1,1]$ zortogonalizować wielomiany:

   (a) $1,$

   (b) $x,$

   (c) $x^2,$

2. Napisać równania różniczkowe dla

   (a) wielomianów Laguerre'a,

   (b) wielomianów Czebyszewa,

3. Podać rozwiązanie równania:

$$(1-x^2)f'' - 2xf' + 12f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad x \in [-1,1].$$

4. Korzystając ze wzoru Rodriguesa obliczyć współczynniki $a_n$ i $b_n$

   (a) wielomianów Laguerra $L_n^\lambda$ dla $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$

   (b) wielomianów Czebyszewa $T_n$

Czyli współczynniki przy pierwszych dwóch najwyższych potęgach.

5. Obliczyć wartość wielomianów Laguerra $L_n^\lambda(x)$ w $x = 0$.

Dla $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$

6. Obliczyć kwadraty norm

   (a) wielomianów Laguerra $\left\|L_n^\lambda\right\|^2$ dla $m = 0, 1, 2, \ldots$

   (b) wielomianów Czebyszewa'a $\|T_n\|^2$,

7. Napisać związki rekurencyjne dla

   (a) wielomianów Laguerre'a,

   (b) wielomianów Czebyszewa,

8. Obliczyć całki:

   (a) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_1(x) H_3(x)\, dx,$

   (b) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} L_2^1(x) L_3^1(x)\, dx,$

Korzystając ze związków rekurencyjnych dla wielomianów.

9. Korzystając z odpowiednich funkcji tworzących obliczyć:

   (a) $P_n(\pm 1),$

   (b) $H_n(0),$

   (c) $L_n^0(0),$

   (d) $L_n^1(0),$

10. Sprawdzić poprawność wzoru:

Korzystając z równania rekurencyjnego dla wielomianów Czebyszewa.

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left[n \arccos(x)\right], \quad n > 1, \quad T_0(x) = 1.$$

11. Określić wszystkie miejsca zerowe wielomianu $T_5(x)$.

Dla $x \in [-1, 1]$.

12. Sprawdzić rozwinięcie:

Uwaga: jest to funkcja tworząca dla wielomianów Czebyszewa.

$$\frac{4 - w^2}{4 - 4wx + w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n T_n(x)$$

13. Wyprowadzić wzory

(a) $(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$,

(b) $H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x)$,

(c) $H_n(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

*C5-C6: Wielomiany ortogonalne: wskazówki.*

1. Można spróbować ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Z zadaną wagą, jeśli taka wola.

2. Należy rozważyć uniwersalne równanie dla wielomianów $Q_n$

$$BQ_n'' + (A + B')Q_n' - n[A_1 + (n+1)B_2]Q_n = 0.$$

(a) dla wielomianów Laguerre'a $L_n^\lambda$ mamy $A(x) = \lambda - x$, $B(x) = x$,

(b) a dla Czebyszewa $T_n$ $A(x) = x$, $B(x) = 1 - x^2$.

Wzory (4.11), (4.12) w [1].

$$A(x) = A_1 x + A_0,$$
$$B(x) = B_2 x^2 + B_1 x + B_0,$$

są wielomianami przez które wyraża się pochodna logarytmiczna wagi

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{A}{B}.$$

3. Jest to równanie na jeden z wielomianów Legendre'a.

4. Należy skorzystać z ogólnego wzoru

Wzór (4.18) w [1].

$$W_{k+1} = BW_k' + [A + (n-k)B']W_k,\ W_0 = 1$$

Współczynniki przy najwyższych potęgach $w_n$, $v_n$ oraz $a_n$ i $b_n$ spełniają związek $a_n = f_n w_n$, $b_n = f_n v_n$.

Odpowiednio wielomianu $W_n = w_n x^n + v_n x^{n-1} + \ldots$ i wielomianu $Q_n = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$

5. Skorzystać ze wzoru Rodriguesa.

Inny sposób (przy pomocy funkcji tworzących) - patrz Zad 9(c).

6. Należy użyć ogólnego wzoru na kwadrat normy wielomianu

Wzór (4.34) w [1].

$$\|Q_n\|^2 = (-1)^n n! a_n f_n \int_\alpha^\beta \rho(x) B^n(x) dx$$

7. Należy skorzystać z ogólnej postaci równania rekurencyjnego

Wzory (4.42 - 46) w [1].

$$xQ_n = c_{n+1}Q_{n+1} + c_n Q_n + c_{n-1}Q_{n-1},$$
$$c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}},\ c_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}},\ c_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{\|Q_n\|^2}{\|Q_{n-1}\|^2}.$$

8. Skorzystać ze zwiazków rekurencyjnych i relacji ortogonalności.

9. Obliczenia wartości dowolnego wielomianu ortogonalnego $Q_n(x)$ przy pomocy funkcji tworzącej dokonuje się, rozwijając analityczną postać funkcji tworzącej dla tego wielomianu przy zadanej wartosci $x$ w szereg Taylora wokół $w = 0$. Rozwinięcie to należy przyrównać do przedstawienia funkcji tworzącej w postaci szeregu względem potęg $w$, którego współczynnikami sa $Q_n(x)$.

Odpowiednie funkcje tworzące znane są z wykładu i dane wzorami (4.57), (4.61), (4.62) w [1].

Szukane wartości $Q_n(x)$ znajduje się przez przyrównanie po obu stronach wyrazów przy tych samych potęgach $w$.

10. Zadanie rozwiązuje się, wstawiając bezpośrednio postulowaną postać $T_n(x)$ do wzoru rekurencyjnego $xT_n = T_{n+1} + \frac{1}{4}T_{n-1}$.

Pomocne okażą się wzory na cosinus sumy i różnicy kątów.

11. Należy wprost skorzystać z przedstawienia $T_5$ w formie z Zad 10.

12. Zauważmy, że nie jest to funkcja tworząca dla wielomianów $\widetilde{T}_n$, którą można wyznaczyć z ogólnych wzorów podanych na wykładzie. Szereg wystepujący w podanej definicji funkcji tworzącej jest zbieżny dla $|w| < 2$. Należy:

Wzór (4.54) w [1].

- podstawić za $T_n$ przedstawienie z Zad 10.
- podstawić $\xi = \arccos x$.
- rozpisać $\cos(n\xi) = \frac{1}{2}\left(e^{in\xi} + e^{-in\xi}\right)$.
- zsumować szeregi geometryczne o ilorazach $e^{\pm i\xi}w/2$.
- odwrócić podstawienie $\cos\xi = x$.

13.

(a) - zróżniczkować obustronnie funkcję tworzącą po $x$.
  - porównać współczynniki przy konkretnej potędze $t^{k+1}$.
  - zróżniczkować obustronnie formułę rekurencyjną dla $P_n$.

(b) Zróżniczkować stronami wzór Rodriguesa.

(c) Dowód indukcyjny: skorzystać ze wzoru Rodriguesa dla $H_n$.

Dla wielomianów Hermite'a (z indeksem $n-1$).

*C5-C6: Wielomiany ortogonalne: odpowiedzi.*

1. Przyjmując wagę $\rho(x) = 1$, otrzymujemy
   (a) $1$
   (b) $x$
   (c) $x^2 - \frac{1}{3}$
2. 
   (a) $xL_n^{\lambda\prime\prime} + (\lambda - x + 1)L_n^{\lambda\prime} + nL_n^{\lambda} = 0$
   (b) $(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2 T_n = 0$
3. $f(x) = P_3(x)$
4. 
   (a) $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}n(\lambda + n)$
   (b) $a_n = 1, b_n = 0$
5. $L_n^{\lambda}(0) = \frac{(\lambda+n)!}{\lambda!}$
6. 
   (a) $\|L_n^{\lambda}\|^2 = n!\Gamma(\lambda + n + 1) = n!(\lambda + n)!$
   (b) $\|T_n\|^2 = \pi/2^{2n-1}$
7. 
   (a) $xL_n^{\lambda} = -L_{n+1}^{\lambda} + (\lambda + 2n + 1)L_n^{\lambda} - n(\lambda + n)L_{n-1}^{\lambda}$,
   (b) $xT_n = T_{n+1} + \frac{1}{4}T_{n-1}$.
8. 
   (a) $12\sqrt{\pi}$
   (b) $-3! \cdot 4!$
9. 
   (a) $P_n(1) = 1$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, $P_n(-1) = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$.
   (b) $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$, $H_{2n+1}(0) = 0$.
   (c) $L_n^0(0) = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
   (d) $L_n^1(0) = (n + 1)!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
10. **TBA**
11. $x = \cos(\frac{\pi}{10})$, $x = \cos(\frac{3\pi}{10})$, $x = 0$, $x = \cos(\frac{7\pi}{10})$, $x = \cos(\frac{9\pi}{10})$
12. **TBA**
13. **TBA**

*C5-C6: Wielomiany ortogonalne: rozwiązania.*

1.

Przyjmujemy $\rho(x) = 1$

(a) 1 - pierwszy wielomian można pozostawić bez zmiany,

(b) $(x, 1) = \int_{-1}^{1} x dx = 0$

Zatem $x$ jest już ortogonalne do poprzedniego wielomianu 1.

(c) Rozwiążmy układ równań

$(x^2 + ax + b, 1) = (x^2, 1) + a(x, 1) + b(1, 1) = \frac{2}{3} + 2b = 0,$
$(x^2 + ax + b, x) = (x^2, x) + a(x, x) + b(1, x) = \frac{2}{3}a = 0,$
Stąd $a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$ i ortogonalny wielomian ma postać $x^2 - \frac{1}{3}$

$a$ i $b$ są szukanymi współczynnikami.

Warunki te gwarantują ortogonalność $x^2 + ax + b$ do poprzednich wielomianów $x$, 1.

2.

(a) wystarczy podstawić do wzoru ze wskazówki

$A_1 = -1$, $B_2 = 0$

(b) j.w., ($A_1 = 1$, $B_2 = -1$)

3. Jest to równanie dla wielomianów Legendre'a

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \text{ z } n(n+1) = 12 \Rightarrow n = 3$$

Jawna postać wielomianu $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, więc spełnione są warunki początkowe $P_3(0) = 0$, $P_3(1) = 1$.

4.

Dla wielomianów Laguerre'a $A(x) = \lambda - x$, $B(x) = x$.

(a) Rozpisując obie strony wzoru ze wskazówki, mamy

$$\begin{aligned} w_{k+1}x^{k+1} + v_{k+1}x^k + \ldots =& x[kw_k x^{k-1} + (k-1)v_k x^{k-2} + \ldots] \\ &+ (\lambda - x + n - k)[w_k x^k + v_k x^{k-1} + \ldots] \end{aligned}$$

Porównanie współczynników po obu stronach przy $x^{k+1}$ daje
$w_{k+1} = -w_k,\ w_0 = 1 \Rightarrow w_n = (-1)^n$
Porównanie współczynnikow po obu stronach przy $x^k$ daje (ponieważ $w_k = (-1)^k$)
$v_{k+1} = kw_k + (\lambda + n - k)w_k - v_k = (\lambda + n)(-1)^k - v_k$.
Ponieważ $W_1 = BW_0' + (A + nB')W_0 = \lambda - x + n = -x + (\lambda + n) \Rightarrow v_1 = \lambda + n$, stąd
$v_2 = (\lambda + n)(-1) - (\lambda + n) = -2(\lambda + n)$,
$v_3 = (\lambda + n)(-1)^2 + 2(\lambda + n) = 3(\lambda + n)\ldots$,
ogólnie $v_n = (-1)^{n-1}n(\lambda + n)$.
Dla wielomianów Laguerre'a
$f_n = 1 \Rightarrow a_n = w_n = (-1)^n, b_n = v_n = (-1)^{n-1}n(\lambda + n)$

Dla wielomianów Czebyszewa $A(x) = x$, $B(x) = 1 - x^2$.

(b) Rozpisując obie strony wzoru ze wskazówki, mamy

$$\begin{aligned} w_{k+1}x^{k+1} + v_{k+1}x^k + \ldots &= (1 - x^2)[kw_k x^{k-1} + (k-1)v_k x^{k-2} + \ldots] \\ &+ \underbrace{[x + (n-k)(-2x)]}_{(-2n+2k+1)x}[w_k x^k + v_k x^{k-1} + \ldots] \end{aligned}$$

Porównanie współczynników po obu stronach przy $x^{k+1}$ daje $w_{k+1} = -kw_k + (-2n+2k+1)w_k = (-2n+k+1)w_k$.
Ponieważ $w_0 = 1 \Rightarrow w_1 = -2n+1$, $w_2 = (-2n+2)(-2n+1)$, $w_3 = (-2n+3)(-2n+2)(-2n+1)\dots$
$\Rightarrow w_n = (-2n+n)(-2n+(n-1))\dots(-2n+1) = (-1)^n(2n-1)\dots(n+1)n = (-1)^n\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$
Porównanie współczynników po obu stronach przy $x^k$ daje $\nu_{k+1} = -(k-1)\nu_k + (-2n+2k+1)\nu_k = (-2n+k+2)\nu_k$.
Ponieważ $W_1 = BW_0' + (A+nB')W_0 = x - 2nx = (1-2n)x$, stąd $\nu_1 = 0$, więc $\nu_n = 0$, $n = 0,1,2\dots$.
Dla wielomianów Czebyszewa $f_n = (-1)^n\frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \Rightarrow a_n = 1, b_n = 0$.

Ze wzoru Rodriguesa $L_n^\lambda(x) = \widetilde{L}_n^\lambda(x) = x^{-\lambda}e^x(x^\lambda e^{-x}x^n)^{(n)}$

5.

$$\begin{aligned} L_n^\lambda(x) &= x^{-\lambda}e^x\left[(x^{\lambda+1}e^{-x}x^{n-1})^{(n-1)}\right]' = x^{-\lambda}e^x[x^{\lambda+1}e^{-x}L_{n-1}^{\lambda+1}(x)]' \\ &= (\lambda+1)L_{n-1}^{\lambda+1}(x) - xL_{n-1}^{\lambda+1}(x) + x(L_{n-1}^{\lambda+1}(x))' \end{aligned}$$

$L_{n-1}^{\lambda+1}$, $(L_{n-1}^{\lambda+1})'$ są wielomianami stopnia $n-1$, $n-2$ (lub zerem), odpowiednio, więc $L_n^\lambda(0) = (\lambda+1)L_{n-1}^{\lambda+1}(0)$. Powtarzając powyższe rozumowanie $n$ razy, dla wielomianów $L_{n-1}^{\lambda+1}, L_{n-2}^{\lambda+2}, \dots L_1^{\lambda+n-1}$, dochodzimy do wyrażenia

Ze wzoru Rodriguesa $L_0^{\lambda+n}(x) = x^{-(\lambda+n)}e^x(x^{\lambda+n}e^{-x}x^0)^{(0)} = 1$

$$L_n^\lambda(0) = (\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)L_0^{\lambda+n}(0) = \frac{(\lambda+n)!}{\lambda!}$$

6.

$a_n = (-1)^n$, $f_n = 1$, $\rho(x) = x^\lambda e^{-x}$, $B(x) = x$, $(\alpha,\beta) = (0,\infty)$

(a)

$$\left\|L_n^\lambda\right\|^2 = n!\int_0^\infty x^{\lambda+n}e^{-x}dx = n!\int_0^\infty x^{(\lambda+n+1)-1}e^{-x}dx = n!\Gamma(\lambda+n+1)$$

$a_n = 1$, $f_n = (-1)^n\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $B(x) = 1-x^2$, $(\alpha,\beta) = (-1,1)$.

(b)

$$\begin{aligned} \|T_n\|^2 &= (-1)^n n!(-1)^n\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)^n dx \\ &= \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!}\int_{-1}^1(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \end{aligned}$$

ponieważ

Całkę można sprowadzić do funkcji beta Eulera, dokonując podstawień $t = 1-x \Rightarrow x = 1-t, dx = -dt$, a następnie $t = 2s \Rightarrow s = \frac{t}{2}, dt = 2ds$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}dx &= \int_{-1}^{1}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}(1+x)^{n-\frac{1}{2}}dx \\
&= \int_{0}^{2} t^{n-\frac{1}{2}}(2-t)^{n-\frac{1}{2}}dt \\
&= 2^{2n}\int_{0}^{1} s^{n-\frac{1}{2}}(1-s)^{n-\frac{1}{2}}ds \\
&= 2^{2n}\int_{0}^{1} s^{(n+\frac{1}{2})-1}(1-s)^{(n+\frac{1}{2})-1}ds \\
&= 2^{2n}\beta(n+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}) = 2^{2n}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \\
&= 2^{2n}\frac{1}{(2n)!}\left[\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}\right]^2
\end{aligned}$$

7.

Dla wielomianów Laguerre'a $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n-1}n(n+\lambda)$, $\left\|L_n^\lambda\right\|^2 = n!\Gamma(\lambda+n+1)$

(a) $c_{n+1} = -1$,
$c_n = \frac{(-1)^{n-1}n(n+\lambda)}{(-1)^n} - \frac{(-1)^n(n+1)(n+\lambda+1)}{(-1)^{n+1}} = 2n+\lambda+1$,
$c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(-1)^n}\frac{n!}{(n-1)!}\frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+n)} = -n(\lambda+n)$.
Stąd $xL_n^\lambda = -L_{n+1}^\lambda + (\lambda+2n+1)L_n^\lambda - n(\lambda+n)L_{n-1}^\lambda$.

Dla wielomianów Czebyszewa $a_n = 1$, $b_n = 0$, $\|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$

(b) $c_{n+1} = 1$, $c_n = 0$,
$c_{n-1} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{2^{2n-3}}{\pi} = \frac{1}{4}$. Stąd $xT_n = T_{n+1} + \frac{1}{4}T_{n-1}$.

8.

Związek rekurencyjny dla wielomianów Hermite'a $xH_n = \frac{1}{2}H_{n+1} + nH_{n-1}$, norma $\|H_n\|^2 = n!2^n\sqrt{\pi}$, waga $\rho(x) = e^{-x^2}$.

(a)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^2H_1(x)H_3(x)dx &= (xH_1, xH_3) = (\frac{1}{2}H_2 + H_0, \frac{1}{2}H_4 + 3H_2) \\
&= \frac{3}{2}(H_2, H_2) = \frac{3}{2}\|H_2\|^2 = 12\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Związek rekurencyjny dla wielomianów Laguerre'a $xL_n^\lambda = -L_{n+1}^\lambda + (\lambda+2n+1)L_n^\lambda - n(n+\lambda)L_{n-1}^\lambda$,norma $\|L_n^\lambda\|^2 = n!\Gamma(\lambda+n+1)$, waga $\rho(x) = x^\lambda e^{-x}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^2L_2^1(x)L_3^1(x)dx &= \int_{0}^{\infty} xe^{-x}xL_2^1(x)L_3^1(x)dx \\
&= (xL_2^1, L_3^1) = (-L_3^1 + 6L_2^1 - 6L_1^1, L_3^1) \\
&= -(L_3^1, L_3^1) = -\left\|L_3^1\right\|^2 = -3!\Gamma(5) = -3!\cdot 4!
\end{aligned}$$

9.

(a) Funkcja tworząca dla wielomianów Legendre'a

$$\Psi(x,w) = \frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)w^n$$

Dla $x = 1$ mamy więc

$$\frac{1}{\sqrt{1-2w+w^2}} = \frac{1}{|1-w|} \overset{w\to 0}{=} \frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)w^n = P_0(1) + P_1(1)w + P_2(1)w^2 + \ldots,$$

stąd $P_n(1) = 1$, $n = 0, 1, 2 \ldots$.

Analogicznie dla $x = -1$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1+2w+w^2}} = \frac{1}{|1+w|} \overset{w\to 0}{=} \frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1) w^n = P_0(-1) + P_1(-1)w + P_2(-1)w^2 + \ldots,$$

stąd $P_n(-1) = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$.

(b) Funkcja tworząca dla wielomianów Hermite'a

$$\Psi(x, w) = e^{-w^2+2wx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{w^n}{n!}$$

Dla $x = 0$ mamy więc

$$e^{-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(0) \frac{w^n}{n!}$$

stąd $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$ (wyrazy parzyste), $H_{2n+1}(0) = 0$ (wyrazy nieparzyste).

(c) Funkcja tworząca dla wielomianów Laguerre'a $L_n^\lambda(x)$

$$\Psi(x, w) = \frac{1}{(1-w)^{\lambda+1}} e^{x \frac{w}{1-w}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\lambda(x) \frac{w^n}{n!}$$

Dla $\lambda = 0$ i $x = 0$ mamy więc

$$\frac{1}{(1-w)} = 1 + w + w^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^0(0) \frac{w^n}{n!} = L_0^0(0) + \frac{w}{1!} L_1^0(0) + \frac{w^2}{2!} L_2^0(0) + \ldots$$

stąd $L_n^0(0) = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(d) Analogicznie jak w (c), dla $\lambda = 1$, $x = 0$,

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} = 1 + 2w + 3w^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^1(0) \frac{w^n}{n!} = L_0^1(0) + \frac{w}{1!} L_1^1(0) + \frac{w^2}{2!} L_2^1(0) + \ldots$$

stąd $L_n^1(0) = (n+1)n! = (n+1)!$.

10.

Wstawiając postulowaną postać $T_n(x)$ do wzoru rekurencyjnego dla wielomianów Czebyszewa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{x}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) &= \frac{1}{2^n} \cos[(n+1) \arccos x] + \frac{1}{4} \frac{1}{2^{n-2}} \cos[(n-1) \arccos x] \\ x \cos(n \arccos x) &= \frac{1}{2} \cos[(n+1) \arccos x] + \frac{1}{2} \cos[(n-1) \arccos x] \end{aligned}$$

Rozpisując po prawej stronie

$$\begin{aligned} \cos(n \arccos x \pm \arccos x) &= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) \mp \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \\ &= x \cos(n \arccos x) \mp \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \end{aligned}$$

otrzymujemy, że jest ona równa stronie lewej, cbdo.

11.

Miejsca zerowe spełniają równanie $\cos(5 \arccos x) = 0$, stąd $\arccos x = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}$

12.

Niech $\xi = \arccos x$, więc $\cos \xi = x$. Wstawiamy z zad.10

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\xi)$$

stąd

$$\begin{aligned}
\Psi(x,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) w^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) w^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\xi) w^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2} \left(e^{in\xi} + e^{-in\xi}\right) w^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{e^{i\xi} w}{2}\right)^n + \left(\frac{e^{-i\xi} w}{2}\right)^n \right] = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left(\frac{e^{i\xi} w}{2}\right)^n + \left(\frac{e^{-i\xi} w}{2}\right)^n \right] \\
&= -1 + \frac{1}{1 - \frac{w}{2} e^{i\xi}} + \frac{1}{1 - \frac{w}{2} e^{-i\xi}} = -1 + \frac{2 - w\cos\xi}{1 - w\cos\xi + w^2/4} = \frac{4 - w^2}{4 - 4w\cos\xi + w^2} = \frac{4 - w^2}{4 - 4wx + w^2}
\end{aligned}$$

13.

Funkcja tworząca dla wielomianów Legendre'a $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$, podstawowa formuła rekurencyjna $xP_n = \frac{n}{2n+1} P_{n-1} + \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}$

(a) Różniczkujemy obustronnie funkcję tworzącą po $x \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) t^n$
Porównujemy współczynniki przy konkretnym $t^{k+1} \Rightarrow P_k = P_{k+1}' - 2xP_k' + P_{k-1}' \Rightarrow 2xP_k' = P_{k+1}' + P_{k-1}' - P_k$. (♠).
Różniczkujemy obustronnie podstawową formułę rekurencyjna (z zamianą $n \to k$) po $x$ i mnożymy przez 2
$\Rightarrow 2P_k + 2xP_k' = \frac{2k}{2k+1} P_{k-1}' + \frac{2(k+1)}{2k+1} P_{k+1}'$
$\overset{(♠)}{\Rightarrow} P_k = \frac{2k}{2k+1} P_{k-1}' + \frac{2(k+1)}{2k+1} P_{k+1}' - P_{k+1}' - P_{k-1}'$
$= -\frac{1}{2k+1} P_{k-1}' + \frac{1}{2k+1} P_{k+1}' \Rightarrow (2k+1) P_k = P_{k+1}' - P_{k-1}'$, cbdo.

Wzór Rodriguesa dla wielomianów Hermite'a $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$

(b) Ze wzoru Rodriguesa (dla $n-1$)

$$\begin{aligned}
H_{n-1}'(x) &= \frac{d}{dx} \left[ (-1)^{n-1} e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} \right] \\
&= (-1)^{n-1} 2x e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} + (-1)^{n-1} e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \\
&= 2x \underbrace{\left[ (-1)^{n-1} e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} \right]}_{H_{n-1}} - \underbrace{(-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}}_{H_n} \\
\Rightarrow\ & H_{n-1}'(x) = 2xH_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

cbdo.

Należy skorzystać ze wzoru Rodriguesa $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$. Dowód indukcyjny.

(c) Dla $n = 0 \Rightarrow H_0(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right)^0 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1$,więc twierdzenie jest prawdziwe.

Zakładamy prawdziwość wzoru dla $n$ i sprawdzamy prawdziwość dla $n+1$. Ze wzoru Rodriguesa
$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
$\Rightarrow \left(x-\frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = (-1)^n e^{-x^2/2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$, stąd

$$
\begin{aligned}
P &= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\
&= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{d}{dx}\right)\left[\left(x-\frac{d}{dx}\right)^{n}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]\\
&= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{d}{dx}\right)\left[(-1)^n e^{-x^2/2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}\right]\\
&= e^{x^2/2}x(-1)^n e^{-x^2/2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} - e^{x^2/2}\frac{d}{dx}\left[(-1)^n e^{-x^2/2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}\right]\\
&= (-1)^n x e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} - (-1)^n x e^{x^2/2}e^{x^2/2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} - (-1)^n e^{x^2/2}e^{x^2/2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}\\
&= (-1)^{n+1}e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n+1)} = H_{n+1}(x)
\end{aligned}
$$

(ostatnia równość wynika ze wzoru Rodriguesa dla $H_{n+1}$), czyli wzór jest prawdziwy również dla $n+1$, cbdo.

# C7: Funkcje sferyczne

## C7: Funkcje sferyczne: treść zadań.

1. Napisać jawne wzory na wszystkie funkcje sferyczne $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

Należy wyjść od wielomianu Legendre'a $P_2(t)$, gdzie $t = \cos\theta$.

2. Obliczyć normę $\|Y_{2,1}\|$.
3. Wyrazić wielomian $P_l(t)$ przez funkcje sferyczne $Y_{lm}(t, \varphi)$.
4. Wyrazić funkcję $f(x, y, z) = xy$ przez funkcje sferyczne $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.
5. Na sferze jednostkowej zaznaczyć punkty, gdzie $Y_{2,1}(\theta, \varphi) = 0$.
6. Sprawdzić, że równanie Laplace'a jest spełnione również przez funkcję $f(r, \theta, \varphi) = r^{-l-1} Y_{l,m}(\theta, \varphi)$.

Niezależnie od funkcji $f(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi)$.

7. Wykazać, że funkcje sferyczne są funkcjami własnymi operatora trzeciej składowej $\hat{L}_3$ momentu pędu oraz kwadratu momentu pędu $\hat{L}^2$, gdzie $\hat{L}_3 = -i\hbar\partial/\partial\varphi$, $\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2$.

Innymi słowy $\hat{L}_3 Y_{l,m} = m\hbar Y_{l,m}$, gdzie $\hbar = h/(2\pi)$, a $h$ to stała Plancka, oraz $\hat{L}^2 Y_{l,m} = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m}$

8. Podać, z dokładnością do stałej, całkową postać funkcji sferycznych. W tym celu należy sprawdzić, że funkcja

$$f(x, y, z) = \int_0^{2\pi} [z + ix\cos(u) + iy\sin(u)]^l e^{imu} du$$

spełnia równanie Laplace'a.

9. Wyprowadzić związki rekurencyjne dla funkcji sferycznych

$$\hat{L}_\pm Y_{l,m} = (\hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2) Y_{l,m} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\, Y_{l,m\pm 1}$$

$L_\pm$ są operatorami podwyższającymi i obniżającymi liczbę kwantową $m$; porównaj z operatorami kreacji i anihilacji np. dla oscylatora harmonicznego

*C7: Funkcje sferyczne: wskazówki.*

1. Funkcje sferyczne pochodzące od wielomianu Legendre'a $P_2(t)$ to: $Y_{2,m}(\theta,\varphi)$, gdzie $m = -2,-1,0,1,2$.

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}(1-\cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} P_l^{(|m|)}(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (1)$$

oraz

$$P_l^{(|m|)}(\cos\theta) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}[(1-\cos^2\phi)^l]^{(|m|+l)}$$

Nawiasy () w wykładniku potęgi oznaczają pochodną.

2. Czynnik normujący funkcji sferycznej N wynosi:

$$N = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}$$

.

N zapewnia normę funkcji równą jedności.

3. Należy wykorzystać równie (1) i podstawić $m = 0$.

4. Rozwiązanie zadania wymaga przejścia ze zmiennych w układzie kartezjańskim do zmiennych w układzie sferycznym.

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

5. Należy przedyskutować rozwiązania dla $\theta$ oraz $\varphi$.

6. Laplasjan we współrzędnych sferycznych ma postać

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

Dokonując podstawienia $\xi = \cos\theta$, mamy

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\cos\theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\cos\theta} = -(1-\xi^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\xi},$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} = \\ &\frac{1}{(1-\xi^2)^{1/2}}[-(1-\xi^2)^{1/2}]\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{(1-\xi^2)^{1/2}[-(1-\xi^2)^{1/2}]\frac{\partial}{\partial\xi}\right\} + \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} = \\ &\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\right] + \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2},\\ \Rightarrow \qquad &\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\right] + \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\}.\end{aligned}$$

Należy bezpośrednio podziałać operatorem Laplace'a (w formie podanej powyżej) na funkcję $r^{-l-1}Y_{lm}$ i skorzystać z równania różniczkowego na funkcje sferyczne (wzór (5.8) ze skryptu),

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\xi}\right] + \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} = -l(l+1)Y_{lm}$$

7. W tym miejscu trochę wyprowadzeń, zwykle pomijanych w kursach fizyki kwantowej jako trywialne.

   Dokonujemy transformacji do współrzędnych sferycznych,

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi, & r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
y &= r\sin\theta\sin\phi, & \phi &= \arctan(y/x)\\
z &= r\cos\theta, & \theta &= \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.
\end{aligned}
$$

   Obliczamy składowe jakobianu,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi,\\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \ldots = \sin\theta\sin\phi,\\
\frac{\partial r}{\partial z} &= \ldots = \cos\theta,\\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{1}{1+y^2/x^2}\frac{(-y)}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{r\sin\theta\sin\phi}{r^2\sin^2\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta},\\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \ldots = \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta},\\
\frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0,\\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{1+(x^2+y^2)/z^2}\frac{1}{z}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi}{r^3\sin\theta} = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r},\\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \ldots = \frac{\cos\theta\sin\phi}{r},\\
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \ldots = -\frac{1}{r}\sin\theta.
\end{aligned}
$$

   Pochodne względem współrzędnych kartezjańskich, wyrażone we współrzędnych sferycznych, mają więc postać (korzystamy z "reguły łańcuchowej" obliczania pochodnej funkcji złożonej)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi} = \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \phi} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

   Składowe operatora momentu pędu wyrażone w układzie sferycznym mają więc znaną z wykładów z mechaniki kwantowej postać

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x &= \hat{L}_1 = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= -i\hbar\left[r\sin\theta\sin\phi\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - r\cos\theta\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right] \\
&= i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\phi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
\hat{L}_y &= \hat{L}_2 = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = \ldots = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\phi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
\hat{L}_z &= \hat{L}_3 = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = \ldots = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x^2 &= -\hbar^2\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\phi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\phi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
&= -\hbar^2\left[\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin\phi\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \cos\phi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \cos\phi\operatorname{ctg}^2\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right] \\
&= -\hbar^2\left[\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin\phi\cos\phi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}\right)\right. \\
&\quad \left. + \cos\phi\operatorname{ctg}\theta\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}\right) + \cos\phi\operatorname{ctg}^2\theta\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right] \\
\hat{L}_y^2 &= \ldots = -\hbar^2\left[\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \sin\phi\cos\phi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}\right)\right. \\
&\quad \left. - \sin\phi\operatorname{ctg}\theta\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}\right) + \sin\phi\operatorname{ctg}^2\theta\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \sin\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right] \\
\Rightarrow &\qquad L_x^2 + L_y^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \\
\hat{L}_z^2 &= -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}
\end{aligned}$$

Operator kwadratu momentu pędu we współrzędnych sferycznych przyjmuje więc znaną z mechaniki kwantowej postać,

$$\begin{aligned}
\hat{L}^2 &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + (1+\operatorname{ctg}^2\theta)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \\
&= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].
\end{aligned}$$

Jest to pomnożona przez $-\hbar^2$ część kątowa laplasjanu we współrzędnych sferycznych (por. wskazówka do zad.6).

Należy po prostu bezpośrednio podziałać operatorami $\hat{L}_3$, $\hat{L}^2$ w podanej wyżej postaci na funkcje sferyczne $Y_{l,m}$ i skorzystać z definicji funkcji sferycznych (wzór (5.21) w skrypcie) lub równania różniczkowego na funkcje sferyczne (wzór (5.8) w skrypcie).

8. Bezpośrednio podziałać laplasjanem (we współrzędnych kartezjańskich) na podaną funkcję $f(x, y, z)$ (obliczając pochodne pod znakiem całki).

9. Korzystając z postaci operatorów $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$ podanej we wskazówce do zad.7, otrzymujemy

$$\begin{aligned} L_\pm &= L_1 \pm iL_2 = i\hbar \left[ (\sin\phi \mp i\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta(\cos\phi \pm i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi} \right] \\ &= \hbar \left[ \pm(\cos\phi \pm i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta(\cos\phi \pm i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi} \right] \\ &= \hbar e^{\pm i\phi}\left( \pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi} \right). \end{aligned}$$

Szukaną relację rekurencyjną dla $L_+$ otrzymuje się, obliczając bezpośrednio $L_+ Y_{l,m}$. W przypadku operatora $L_-$ wyprowadzenie jest bardziej skomplikowane, zalecane jest zapoznanie się z rozwiązaniem.

*C7: Funkcje sferyczne: odpowiedzi.*

1. $Y_{2,2}\left(\theta,\varphi\right)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{2i\varphi}$
   $Y_{2,-2}\left(\theta,\varphi\right)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{-2i\varphi}$
   $Y_{2,1}\left(\theta,\varphi\right)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}$
   $Y_{2,-1}\left(\theta,\varphi\right)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$
   $Y_{2,0}\left(\theta,\varphi\right)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)$
2. $||Y_{2,1}||=\sqrt{\frac{5}{24\pi}}$
3. $P_l\left(t\right)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{l,0}\left(t,\varphi\right)$
4. $f\left(r,\theta,\varphi\right)=i\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left[Y_{2,-2}\left(\theta,\varphi\right)-Y_{2,2}\left(\theta,\varphi\right)\right]r^2$
5. $\theta=0\vee\theta=\frac{\pi}{2}$ przy $\varphi\in\mathbb{R}$
6.
7. $\hat{L}_3Y_{l,m}=m\hbar Y_{l,m}$; $\hat{L}^2Y_{l,m}=\hbar^2l(l+1)Y_{l,m}$
8. Przedstawienie całkowe:

$$Y_{lm}(\theta,\phi)\propto\int_0^{2\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(u-\phi)]^le^{imu}du.$$

9.

*C7: Funkcje sferyczne: rozwiązania.*

1. Podstawiając do wzoru na funkcje sferyczne otrzymujemy:

$$Y_{2,2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}}\left(1-\cos^2\theta\right)\frac{1}{8}\left[(1-\cos^2\theta)^2\right]^{(4)}e^{2i\varphi}$$
$$= \sqrt{\frac{5}{96\pi}}\left(1-\cos^2\theta\right)\frac{1}{8}\left[1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right]^{(4)}e^{2i\varphi}$$
$$\stackrel{\spadesuit}{=} \sqrt{\frac{45}{96\pi}}\left(1-\cos^2\theta\right)e^{2i\varphi}$$
$$= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{2i\varphi}$$

Obliczenia dla $Y_{2,-2}$ są takie same, jedynie pamiętamy o zamianie m=2 na m=-2 $Y_{2,-2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{-2i\varphi}$.

W ♠ wyznaczana jest czwarta pochodna z wyrażenia w nawiasie kwadratowym.

$$Y_{2,1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{24\pi}}\left(1-\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}\left[(1-\cos^2\theta)^2\right]^{(3)}e^{i\varphi}$$
$$\stackrel{\clubsuit}{=} \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}$$

Dla m=-1 ($Y_{2,-1}$) postępuje się jak w poprzednim przypadku.

W ♣ wyznaczana jest trzecia pochodna z wyrażenia w nawiasie kwadratowym.

$$Y_{2,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(1-\cos^2\theta\right)^0\frac{1}{8}\left[(1-\cos^2\theta)^2\right]^{(2)}$$
$$= \sqrt{\frac{5}{256\pi}}\left(-4+12\cos^2\theta\right) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

Proszę zauważyć brak zależności funkcji sferycznej względem $\varphi$.

2. $||Y_{2,1}|| = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} \stackrel{l=2,m=1}{=} \sqrt{\frac{5}{24\pi}}$

3.

$$Y_{l,m}(t,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}(1-t^2)^{\frac{|m|}{2}}P_l^{(|m|)}(t)e^{im\varphi}$$
$$\stackrel{m=0}{=} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}P_l(t)$$

Proszę zauważyć, że przy $m=0$, nie ma funkcyjnej zależności względem $\varphi$.

$$P_l(t) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}}Y_{l,0}(t,\varphi)$$

4. Funkcja $f(x,y,z) = xy$ wyrażona w zmiennych układu sferycznego ma postać $f(r,\theta,\varphi) = r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi$.
Do rozwiązania wykorzystamy funkcje sferyczne dla małych wartości indeksów (l=2, m=2 oraz m=-2).

$Y_{2,2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{2i\varphi}$
$Y_{2,-2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{-2i\varphi}$

$$
\begin{aligned}
r^2 \frac{Y_{2,2}(\theta,\varphi) - Y_{2,-2}(\theta,\varphi)}{2i} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} r^2 \sin^2\theta \sin(2\varphi) \\
r^2 \frac{Y_{2,2}(\theta,\varphi) - Y_{2,-2}(\theta,\varphi)}{2i} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} r^2 \sin^2\theta \sin\varphi\cos\varphi \\
i\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \left[Y_{2,-2}(\theta,\varphi) - Y_{2,2}(\theta,\varphi)\right] r^2 &= r^2 \sin^2\theta \sin\varphi\cos\varphi
\end{aligned}
$$

Zaproponowane rozwiązanie nie jest jedyne.

5.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\varphi} &= 0 \\
2\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi} &= 0 \\
\sin(2\theta)\, e^{i\varphi} &= 0
\end{aligned}
$$

Musi zachodzić: $\sin(2\theta) = 0 \vee e^{i\varphi} = 0$
Redukuje się do: $2\theta = 0$ przy $\theta \in \langle 0, \pi)$
Ostatecznie $\theta = 0 \vee \theta = \frac{\pi}{2}$ przy $\varphi \in \mathbb{R}$

6.

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \nabla^2 r^{-l-1} Y_{lm}(\xi,\phi) \\
&= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} r^{-l-1} Y_{lm}(\xi,\phi) \\
&= Y_{lm}(\xi,\phi)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) r^{-l-1} + \frac{r^{-l-1}}{r^2}\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi}\right] + \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} Y_{lm}(\xi,\phi) \\
&= [(l+1)(l+2) - 2(l+1) - l(l+1)] r^{-l-3} Y_{lm}(\xi,\phi) = 0
\end{aligned}
$$

7. Korzystając z równania na funkcje sferyczne (wzór (5.8) w skrypcie) oraz ze wskazówki do zad.6 otrzymujemy

$$
\hat{L}^2 Y_{lm}(\xi,\phi) = -\hbar^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi}\right] + \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} Y_{lm}(\xi,\phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\xi,\phi),
$$

więc rzeczywiście funkcje sferyczne $Y_{l,m}$ są funkcjami własnymi operatora $\hat{L}^2$, odpowiadającymi wartościom własnym $\hbar^2 l(l+1)$.

Korzystając z jawnej postaci funkcji sferycznych (wzór (5.21) w skrypcie) otrzymujemy z kolei

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_3 Y_{l,m}(\xi,\phi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} N_{lm}(1-\xi^2)\frac{|m|}{2}(P_l(\xi))^{(|m|)} e^{im\phi} \\
&= m\hbar N_{lm}(1-\xi^2)\frac{|m|}{2}(P_l(\xi))^{(|m|)} e^{im\phi} \\
&= m\hbar Y_{l,m},
\end{aligned}
$$

więc rzeczywiście funkcje sferyczne $Y_{l,m}$ są funkcjami własnymi operatora $\hat{L}_3$, odpowiadającymi wartościom własnym $\hbar m$.

8.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^l e^{imu} du, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \int_0^{2\pi} du e^{imu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z + ix\cos u + iy\sin u)^l \\
&= -l(l-1)\cos^2 u \int_0^{2\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^{l-2} e^{imu} du, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \ldots = -l(l-1)\sin^2 u \int_0^{2\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^{l-2} e^{imu} du, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \ldots = l(l-1) \int_0^{2\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^{l-2} e^{imu} du, \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
&= \left[ l(l-1) \int_0^{2\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^{l-2} e^{imu} du \right] (-\cos^2 u - \sin^2 u + 1) = 0
\end{aligned}$$

Zapiszmy funkcję $f$ w zmiennych układu sferycznego, ,

$x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$

$$\begin{aligned}
(z + ix\cos u + iy\sin u)^l &= r^l [\cos\theta + i\sin\theta(\cos\phi\cos u + \sin\phi\sin u)]^l \\
&= r^l [\cos\theta + i\sin\theta\cos(u-\phi)]^l \\
\Rightarrow f(r,\theta,\phi) &= r^l \int_0^{2\pi} [\cos\theta + i\sin\theta\cos(u-\phi)]^l e^{imu} du
\end{aligned}$$

Wiadomo że $\tilde{f}(r,\theta,\phi) = r^l Y_{lm}(\theta,\phi)$ również spełnia równanie Laplace'a $\nabla^2 \tilde{f} = 0$ (por. wykład i wzory (5.6), (5.7) w skrypcie). Wobec tego otrzymujemy następujące przedstawienie całkowe funkcji sferycznych (z dokładnością do stałej)

$$Y_{lm}(\theta,\phi) \propto \int_0^{2\pi} [\cos\theta + i\sin\theta\cos(u-\phi)]^l e^{imu} du.$$

9. Ograniczmy się dla uproszczenia do przypadku $m \geq 0$. Wprowadźmy oznaczenie

$$P_l^m(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} P_l^{(m)}(\xi) \Rightarrow Y_{lm}(\xi,\phi) = N_{lm} P_l^m(\xi) e^{im\phi}.$$

Obliczamy wyrażenia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta} Y_{lm}(\xi,\phi) &= -N_{lm} e^{im\phi} (1-\xi^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial\xi} P_l^m(\xi) \\
&= -N_{lm} e^{im\phi} (1-\xi^2)^{1/2} \left[ \frac{m}{2} (1-\xi^2)^{m/2-1} (-2x) P_l^{(m)}(\xi) + (1-\xi^2)^{m/2} P_l^( m+1)(\xi) \right] \\
&= N_{lm} e^{im\phi} \left[ m\xi (1-\xi^2)^{(m-1)/2} P_l^{(m)}(\xi) - (1-\xi^2)^{(m+1)/2} P_l^{(m+1)}(\xi) \right] \\
&= N_{lm} e^{im\phi} \left[ m\xi (1-\xi^2)^{-1/2} P_l^m(\xi) - P_l^{m+1}(\xi) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\phi} Y_{lm}(\xi,\phi) &= -mN_{lm} \operatorname{ctg}\theta P_l^m(\xi) e^{im\phi} \\
&= -m\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} N_{lm}(1-\xi^2)^{m/2} P_l^{(m)}(\xi) e^{im\phi} \\
&= N_{lm} e^{im\phi}\left[-m\xi(1-\xi^2)^{(m-1)/2} P_l^{(m)}(\xi)\right] \\
&= N_{lm} e^{im\phi}\left[-m\xi(1-\xi^2)^{-1/2} P_l^m(\xi)\right].
\end{aligned}$$

Stąd dla $L_+ Y_{lm}$ otrzymujemy bezpośrednio

$$\begin{aligned}
L_+ Y_{lm}(\xi,\phi) &= \hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) Y_{lm}(\xi,\phi) = -\hbar N_{lm} P_l^{m+1}(\xi) e^{i(m+1)\phi} \\
&= -\hbar\frac{N_{lm}}{N_{l,m+1}} N_{l,m+1} P_l^{m+1} e^{i(m+1)\phi} = -\hbar\frac{N_{lm}}{N_{l,m+1}} Y_{l,m+1}(\xi,\phi).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{N_{lm}}{N_{l,m+1}} &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}\frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!}} = \sqrt{\frac{(l-m)!(l+m+1)!}{(l+m)!(l-m-1)!}} \\
&= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$L_+ Y_{lm} = -\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\, Y_{l,m+1}.$$

Obliczenia dla $L_- Y_{lm}$ są bardziej złożone.

$$\begin{aligned}
L_- Y_{lm}(\xi,\phi) &= \hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) Y_{lm}(\xi,\phi) \\
&= \hbar N_{lm} e^{i(m-1)\phi}\left[-2m\xi(1-\xi^2)^{-1/2} P_l^m(\xi) + P_l^{m+1}(\xi)\right] \\
&= \hbar N_{lm} e^{i(m-1)\phi}(1-\xi^2)^{(m-1)/2}\left[-2m\xi P_l^{(m)}(\xi) + (1-\xi^2) P_l^{(m+1)}(\xi)\right].
\end{aligned}$$

Posłużmy się znanym z wykładu (wzór (5.16) w skrypcie) równaniem spełnianym przez pochodne wielomianów Legendre'a

$$(1-\xi^2)(P_l^{(m)})'' - 2\xi(m+1)(P_l^{(m)})' + [l(l+1)-m(m+1)]P_l^{(m)} = 0,$$

dokonajmy zamiany $m \to m-1$

$$(1-\xi^2)(P_l^{(m-1)})'' - 2\xi m(P_l^{(m-1)})' + [l(l+1)-m(m-1)]P_l^{(m-1)} = 0.$$

Ponieważ $(P_l^{(m-1)})' = P_l^{(m)}$, $(P_l^{(m-1)})'' = P_l^{(m+1)}$,

$$\Rightarrow (1-\xi^2)P_l^{(m+1)} - 2\xi m P_l^{(m)} = -[l(l+1)-m(m-1)]P_l^{(m-1)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
L_- Y_{lm}(\xi,\phi) &= -\hbar\frac{N_{lm}}{N_{l,m-1}}[l(l+1)-m(m-1)] N_{l,m-1} e^{i(m-1)\phi}(1-\xi^2)^{(m-1)/2} P_l^{(m-1)} \\
&= -\hbar\frac{N_{lm}}{N_{l,m-1}}[l(l+1)-m(m-1)] Y_{l,m-1}(\xi,\phi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{N_{lm}}{N_{l,m-1}} &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}\frac{(l+m-1)!}{(l-m+1)!}} = \sqrt{\frac{(l-m)!(l+m-1)!}{(l+m)!(l-m+1)!}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(l+m)(l-m+1)}} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}}
\end{aligned}
$$

Ostatecznie

$$
L_- Y_{lm} = -\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}Y_{l,m-1}.
$$

# *C8-C9: Funkcje Bessela*

## *C8-C9: Funkcje Bessela: treść zadań.*

1. Wykazać, że $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$.
2. Podać rozwiązanie równania $x^2 f'' + xf' + (4x^2 - 9)f = 0$. Nieosobliwe, oczywiście!
3. Podać szereg Bessela dla równania $x^2 f'' + xf' - (x^2 + \nu^2)f = 0$. Przyjmujemy, że $\nu \in \mathbb{R}$.
4. Wyrazić funkcje $\sin(x)$ oraz $\cos(x)$ przez funkcje Bessela.
5. Wykazać, że
$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y).$$
6. Zapisać w postaci szeregu całkę $I = \int_0^{2\pi} \cos\left[2\sin(\varphi) - 3\varphi\right] d\varphi$. *Zwykłego* szeregu liczbowego.
7. Wykazać, że transformata Laplace'a
   (a) funkcji Bessela $J_0(t)$ wynosi $\widetilde{J_0}(s) = \left(s^2+1\right)^{-1/2}$.
   (b) funkcji $f(t) = J_0\left(2\sqrt{t}\right)$ wynosi $\widetilde{f}(s) = s^{-1}e^{-1/s}$.
8. Wyrazić przez funkcje elementarne funkcję $J_{-3/2}(x)$.
9. Znaleźć dwa związki między funkcjami $J_0$ oraz $J_1$.
10. Udowodnić, że $J_{\nu+1} + J_{\nu-1} = \frac{2\nu}{x} J_\nu$.
11. To samo dla sferycznych funkcji Bessela, $j_{l+1} + j_{l-1} = \frac{2l+1}{x} j_l$.
12. Rozwiązać równanie
$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0.$$
13. Sprawdzić ortogonalność funkcji $J_{1/2}(2x)$ oraz $J_{1/2}(x)$ dla $L = \pi$.

*C8-C9: Funkcje Bessela: wskazówki.*

1. Korzystamy z szeregu Bessela (wzór (6.11) ze skryptu) oraz właściwości funkcji gamma Eulera

2. Dokonać podstawienia $x = At$ i wyznaczyć $A$ tak, żeby sprowadzić zadane równanie do równania na pewną funkcję Bessela.

3. Równanie jest spełnione przez funkcję $K_\nu = J_\nu(ix)$, tj. funkcję Bessela argumentu zespolonego.

4. Należy skorzystać z funkcji tworzącej dla funkcji Bessela (wzór (6.13) ze skryptu) , w której przyjmujemy $w = i$.

5. Należy skorzystać z funkcji tworzącej dla funkcji Bessela (wzór (6.13) ze skryptu)

6. Należy skorzystać z przedstawienia całkowego funkcji Bessela (wzór (6.20) ze skryptu), wyniku zad.1 oraz z szeregu Bessela dla funkcji Bessela z indeksem całkowitym

7. (a) Należy skorzystać z przedstawienia całkowego funkcji Bessela (wzór (6.20) ze skryptu)
   (b) Korzystamy z rozwinięcia funkcji Bessela z indeksem całkowitym na szereg (wzór (6.12) w skrypcie) , a przy obliczaniu transformaty całkujemy pod znakiem sumy (jest to możliwe, ponieważ szereg Bessela jest jednostajnie zbieżny),

8. Korzystamy ze wzorów rekurencyjnych dla funkcji Bessela (wzór (6.27) w skrypcie) oraz znanej postaci funkcji $J_{-1/2}$ (wzór (6.28) w skrypcie).

9. Korzystamy ze wzorów rekurencyjnych dla funkcji Bessela (wzory (6.24), (6.27) w skrypcie).

10. Por. wskazówka do zad.9

11. Korzystamy z wyniku zad.10, przyjmując w nim $\nu = l + \frac{1}{2}$, i z definicji sferycznych funkcji Bessela

12. Dokonać zamiany zmiennych $y = kr$, $S = \sqrt{y}R$ (por. wykład z komentarzem).

13. Bezpośrednie całkowanie.

$J_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\Gamma(l+\nu+1)}(x/2)^{2l+\nu}$. W szczególności $\Gamma(k) \to \pm\infty$ dla $k \in \mathbb{Z}, k \leq 0$, więc przy $l, n \in \mathbb{N}$ zachodzi $1/\Gamma(l-n+1) = 0$ dla $l - n + 1 \leq 0 \Rightarrow l \leq n-1$.

$\Psi(w,x) = e^{(x/2)(w-1/w)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) w^n$

$J_n(t) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\phi \exp[i(t\sin\phi - n\phi)]$ $J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{1}{l!(n+l)!}(x/2)^{2l+n}$.

$J_n(t) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\phi \exp[i(t\sin\phi - n\phi)]$

$J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}$

$J_{\nu-1}(x) = x^{-\nu}\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x))$, $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

$J_{\nu+1}(x) = -x^\nu \frac{d}{dx}(x^{-\nu}J_\nu(x))$ $J_{\nu-1}(x) = x^{-\nu}\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x))$

$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)$.

$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}\sin x}$; relacja ortogonalności dla funkcji Bessela ma postać $\int_0^L xJ_\mu(ax)J_\mu(bx)dx$ (wzór (6.74) ze skryptu)

*C8-C9: Funkcje Bessela: odpowiedzi.*

1.

2. $f(x) = J_3(2x)$ lub $f(x) = J_{-3}(2x)$

3. $K_\nu = J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!\Gamma(l+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu}$.

4.

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) \\ \sin x &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(x) \end{aligned}$$

5.

6. $I = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+3)!}$

7.

8. $J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\cos x}{x} - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$

9. $J_1(x) = -\frac{d}{dx} J_0(x)$, $J_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x y J_0(y) dy$

10.

11.

12. $R(y) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{l+1/2}(kr)$

13.

*C8-C9: Funkcje Bessela: rozwiązania.*

1.

$$J_{-n}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\Gamma(l-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-n} = \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-n}$$

Dokonujemy zamiany indeksów sumowania $m = l - n \Rightarrow l = m + n$, $m = 0, 1, 2 \ldots$,

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x) \text{ cbdo.}$$

2.

$$x = At \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{df}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{df}{dt} = \frac{1}{A}\frac{df}{dt}$$

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\frac{1}{A}\frac{df}{dt} = \frac{1}{A^2}\frac{d^2 f}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad t^2 \frac{d^2 f}{dt^2} + t\frac{df}{dt} + (4A^2 t^2 - 9) f = 0$$

Przyjęcie $4A^2 = 1 \Rightarrow A = 1/2$ prowadzi do równania

$$t^2 \frac{d^2 f}{dt^2} + t\frac{df}{dt} + (t^2 - 9) f = 0,$$

którego rozwiązaniem jest $f(t) = J_3(t) \Rightarrow f(x) = J_3(x/A) = J_3(2x)$.

Uwaga: innym rozwiązaniem jest $J_{-3}(2x) = (-1)^3 J_3(2x) = -J_3(2x)$ (por. zad.1), które spełnia takie samo równanie na funkcję Bessela

3. Przyjmujemy $\xi = ix \Rightarrow x = -i\xi$.

$$K_\nu' = \frac{d}{dx} J_\nu(ix) = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} J_\nu(\xi) = i\frac{dJ_\nu}{d\xi}$$

$$K_\nu'' = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} J_\nu(ix) = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} i\frac{dJ_\nu}{d\xi} = -\frac{d^2 J_\nu}{d\xi^2}$$

Wstawiając do zadanego równania, otrzymujemy że funkcja $J_\nu(\xi)$ rzeczywiście spełnia równanie Bessela

$$\xi^2 \frac{d^2 J_\nu}{d\xi^2} + \xi\frac{dJ_\nu}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2) J_\nu = 0$$

Odpowiedni szereg Bessela ma więc postać (por. wzór (6.11) ze skryptu)

$$K_\nu = J_\nu(ix) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\Gamma(l+\nu+1)} \underbrace{\left(\frac{ix}{2}\right)^{2l+\nu}}_{i^{2l+\nu} = i^{2l} i^\nu = (-1)^l i^\nu}$$

$$= i^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!\Gamma(l+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu}.$$

$w = i \Rightarrow \frac{1}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) = \frac{1}{2}\left(i - \frac{1}{i}\right) = i.$

4.

$$\begin{aligned}
\Psi(i,x) &= e^{ix} = \cos x + i\sin x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) i^n \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k}(x) i^{2k} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{2l+1}(x) i^{2l+1} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k}(x)(-1)^k + i \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{2l+1}(x)(-1)^l \\
\Rightarrow \cos x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) \\
\sin x &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(x)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\Psi(w, x+y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) w^n \\
&= \exp\left[\frac{x+y}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] = \exp\left[\frac{x}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] \exp\left[\frac{y}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] \\
&= \Psi(w,x)\Psi(w,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) w^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(y) w^k \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_k(y) w^{m+k}
\end{aligned}$$

Dokonujemy podstawienia $n = m + k \Rightarrow k = n - m$, $n \in \mathbb{Z}$, stąd

$$\Psi(w, x+y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y)\right] w^n.$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach $w$, otrzymujemy

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(y) \text{ cbdo.}$$

6.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \cos(2\sin\phi - 3\phi) d\phi \\
&= \pi\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(2\sin\phi - 3\phi)} d\phi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i[-2\sin\phi - (-3)\phi]} d\phi\right\} \\
&= \pi\left[J_3(2) + J_{-3}(-2)\right] = \pi\left[J_3(2) + (-1)^3 J_3(-2)\right] \\
&= \pi\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+3)!} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+3)!}(-1)^{2l+3}\right] = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+3)!}
\end{aligned}$$

7.(a) Rozpatrzmy ogólniejszą transformatę Laplace'a funkcji $J_n(bt)$, $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_n(s) &= \int_0^\infty dt e^{-st} J_n(bt) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dt e^{-st}\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(bt\sin\phi - n\phi)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi}\int_0^\infty dt e^{-(s-ib\sin\phi)t} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} \left. \underbrace{\frac{e^{-(s-ib\sin\phi)t}}{s-ib\sin\phi}}_{=0 \text{ dla } t\to\infty, \text{ bo } s>0} \right|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-in\phi}}{s-ib\sin\phi}d\phi
\end{aligned}$$

Dokonujemy zamiany zmiennych $z = e^{-i\phi} \Rightarrow dz = -ie^{-i\phi}d\phi = -izd\phi \Rightarrow d\phi = idz/z$, $\sin\phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i = (z^{-1} - z)/2i$.

$$\tilde{J}_n(s) = \frac{i}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z^n dz}{bz^2 + 2sz - b}$$

Krzywa całkowania jest okręgiem jednostkowym $O((0,0),1)$ (tj. $|z| = 1$), obieganym zgodnie z ruchem wskazówek zegara (a więc przeciwnie do kierunku wzrostu kąta $\phi$), co powoduje pojawienie się minusa przed wynikiem przy całkowaniou metodą residuów (lub we wzorze Cauchy'ego).

Funkcja podcałkowa ma bieguny rzędu pierwszego w punktach

$$z_{1,2} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2+b^2}}{b}.$$

Zachodzi $|z_1| < 1$, $|z_2| > 1$, więc tylko biegun $z_1$ leży wewnątrz krzywej całkowania,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_n(s) &= \frac{i}{\pi}(-2\pi i)\text{res}_{z_1} = 2\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{z^n}{b(z-z_1)(z-z_2)} \\
&= \frac{2z_1^n}{b(z_1-z_2)} = \frac{(\sqrt{s^2+b^2}-s)^n}{b^n\sqrt{s^2+b^2}}
\end{aligned}$$

Podstawiając zgodnie z treścią zadania $n = 0$, $b = 1$ otrzymujemy $\tilde{J}_0(s) = 1/\sqrt{s^2+1}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(s) &= \sum_{l=0}^\infty \frac{(-1)^l}{(l!)^2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}t^l dt}_{\text{transformata } t^l} = \sum_{l=0}^\infty\frac{(-1)^l}{(l!)^2}\frac{l!}{s^{l+1}} \\
&= \frac{1}{s}\sum_{l=0}^\infty\frac{1}{l!}\left(-\frac{1}{s}\right)^l = \frac{1}{s}\exp\left(-\frac{1}{s}\right)
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
J_{-3/2}(x) &= J_{-1/2-1}(x) = x^{1/2}\frac{d}{dx}(x^{-1/2}J_{-1/2}) \\
&= -\frac{1}{2x}J_{-1/2} + \frac{d}{dx}J_{-1/2} \\
&= -\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\right) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{\cos x}{x} - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} J_1 &= -x^0 \frac{d}{dx}(x^0 J_0) = -\frac{d}{dx} J_0 \\ J_0 &= x^{-1} \frac{d}{dx}(x J_1) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x J_1) = x J_0 \Rightarrow J_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x y J_0(y) dy \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} J_{\nu+1} &= -x^\nu \frac{d}{dx} \frac{J_\nu}{x^\nu} = -x^\nu \frac{J_\nu' x^\nu - J_\nu \nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -J_\nu' + \frac{\nu J_\nu}{x} \\ \Rightarrow J_\nu' &= \frac{\nu J_\nu}{x} - J_{\nu+1} \\ J_{\nu-1} &= x^{-\nu} \frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu) = x^{-\nu} \left( \nu x^{\nu-1} J_\nu + x^\nu J_\nu' \right) = \frac{\nu J_\nu}{x} + J_\nu' \\ \Rightarrow J_\nu' &= -\frac{\nu J_\nu}{x} + J_{\nu-1} \end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{\nu J_\nu}{x} - J_{\nu+1} = -\frac{\nu J_\nu}{x} + J_{\nu-1} \Rightarrow J_{\nu+1} + J_{\nu-1} = \frac{2\nu J_\nu}{x} \text{ cbdo.}$$

11. $j_{l+1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(l+\frac{1}{2})+1}(x)$, $j_{l-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(l+\frac{1}{2})-1}(x)$.

Z zad.10, mnożąc wynik dla $\nu = l + \frac{1}{2}$ stronami przez $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(l+\frac{1}{2})+1} + \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(l+\frac{1}{2})-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{2(l+\frac{1}{2}) J_{l+\frac{1}{2}}}{x} \Rightarrow j_{l+1}(x) + j_{l-1}(x) = \frac{2l+1}{x} j_l(x) \text{ cbdo.}$$

12.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (\spadesuit)$$

$y = kr$, $R(r) = \frac{S(y)}{\sqrt{y}} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= \frac{dy}{dr}\frac{d}{dy}\left( \frac{S}{\sqrt{y}} \right) = k \left( \frac{dS}{dy} y^{-1/2} - \frac{1}{2} y^{-3/2} S \right) \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{dy}{dr}\frac{d}{dy}\frac{dR}{dr} = k^2 \frac{d^2}{dy^2}\left( \frac{S}{\sqrt{y}} \right) = k^2 \left( y^{-1/2} \frac{d^2 S}{dy^2} - y^{-3/2} \frac{dS}{dy} + \frac{3}{4} y^{-5/2} S \right) \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe do ($\spadesuit$), mnożąc stronami przez $y^{5/2}$, dzieląc przez $k^2$ i grupując wyrazy podobne, otrzymujemy równanie na funkcję $S(y)$,

$$y^2 \frac{d^2 S}{dy^2} + y \frac{dS}{dy} + \left[ y^2 - l(l+1) - \frac{1}{4} \right] S = y^2 \frac{d^2 S}{dy^2} + y \frac{dS}{dy} + \left[ y^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] S = 0 \quad (\clubsuit)$$

Rozwiązaniem ($\clubsuit$) jest $S(y) = J_{l+1/2}(y)$, więc $R(y) = S(y)/\sqrt{y} = S(kr)/\sqrt{kr} = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{l+1/2}(kr)$.

13. $\int_0^\pi x J_{1/2}(2x) J_{1/2}(x) dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \sin(2x) \sin(x) dx = 0$, co widać od razu bez obliczania całki, ponieważ $\sin(2x)$ ma okres dwukrotnie mniejszy niż $\sin x$.

## *C10-C11: Dystrybucje*

### *C10-C11: Dystrybucje: treść zadań.*

1. Sporządzić wykresy funkcji ($\Theta(x)$ oznacza funkcję Heaviside'a (schodkową)
   (a) $\Theta(-x)$
   (b) $\Theta(x^2 - a^2)$
   (c) $\Theta(a^2 - x^2)$
   (d) $\Theta(-x^2 + 4x - 3)$
2. Obliczyć sploty dwóch ciągów $(a_n)$ i $(b_n)$:
   (a) $a \star a$,
   (b) $a \star b$,

   gdzie $a_n = \delta_{1,n} + \delta_{2,n}$, $b_n = \delta_{1,n} + 2\delta_{2,n} - \delta_{3,n}$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. Obliczyć sploty funkcyjne $f \star g$ dla
   (a) $f(x) = \Theta(1 - x^2)$, $g(x) = \Theta(x)$,
   (b) $f(x) = x^2\Theta(1 - x^2)$, $g(x) = x\Theta(x)$,
   (c) $f(x) = G_\alpha(x)$, $g(x) = G_\beta(x)$, gdzie $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$ - funkcja Gaussa,
   (d) $f(x) = Z_{\alpha,\lambda}(x)$, $g(x) = Z_{\beta,\lambda}(x)$, gdzie $Z_{\alpha,\lambda}(x) = \Theta(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x}$,
   (e) $f(x) = P_a(x)$, $g(x) = P_b(x)$, gdzie $P_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$, $a > 0$.
4. Obliczyć wartości główne całek
   (a) $I = P\int_0^4 \frac{dx}{x-1}$,
   (b) $I = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$; porównaj z całką $\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{2A} \frac{xdx}{x^2+1}$.
5. Znaleźć granice ciągów dystrybucyjnych przy $n \to \infty$
   (a) $P\frac{\cos(nx)}{x}$,
   (b) $P\frac{\cos(x/n)}{x}$.
6. Znaleźć granice ciągów dystrybucyjnych przy $n \to \infty$
   (a) $f_n(x) = ne^{-n|x-1|}$,
   (b) $f_n(x) = ne^{-|nx-1|}$.
7. Napisać ciąg $\delta$-podobny, startując z funkcji $-f'_F(x)$, gdzie funkcja Fermiego $f_F(x) = 1/(e^x + 1)$.
8. Uprościć iloczyny

(a) $x\delta(3-2x)$,
(b) $x\delta(x^2-4)$,
(c) $\sin(\pi x)\delta(x^2-4)$.

9. Uprościć sploty

(a) $x \star \delta(3-2x)$,
(b) $x \star \delta(x^2-4)$,
(c) $\sin(\pi x) \star \delta(x^2-4)$.

10. Naszkicować wykresy pierwszej i drugiej pochodnej dystrybucyjnej dla funkcji

(a) $f(x) = e^{-|x|}$,
(b) $f(x) = \Theta(\pi^2 - x^2)\sin x$.

11. Obliczyć pochodną dystrybucyjną funkcji $f(x) = \ln|x|$.

12. Uprościć wyrażenia

(a) $x\delta''(x)$,
(b) $x^2\delta''(x)$,
(c) $x^3\delta''(x)$,

13. Rozwiązać równanie $\nabla^2 f(\vec{r}) \pm k^2 f(\vec{r}) = -\delta(\vec{r})$.

*C10-C11: Dystrybucje: wskazówki.*

1. $\Theta(f(x)) = 0$ dla $f(x) < 0$, $\Theta(f(x)) = 1$ dla $f(x) \geq 0$

2. Splot dwóch ciągów jest zdefiniowany jako ciąg o wyrazach $(a \star b)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k$. Zauważmy że iloczyn dwóch delt Kroneckera $\delta_{k,l}\delta_{l,m} = 1 \Leftrightarrow k = l \wedge l = m$, w pozostałych przypadkach wynosi on zero. Stąd np. jedynym wyrazem niezerowym w sumie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{1,n-k}\delta_{1,k}$ jest wyraz z $k = 1$, $n - 1 = 1$, więc $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{1,n-k}\delta_{1,k} = \delta_{1,n-1} = \delta_{2,n}$, itd.

3. Splot funkcyjny jest zdefiniowany jako $(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)$.. W pkt.(a,b,d) szczególną uwagę należy zwrócić na granice całkowania; proszę sprawdzać, dla jakich wartości $t$ oraz $x$ wynik jest różny od zera.

4. Zgodnie z definicją wartości głównej należy symetrycznie wyłączać osobliwość lub przechodzić do granicy w nieskończoności.

5.

6. Zauważmy, że ciąg bazujący na funkcji $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ w postaci $f_n(x) = nf(nx) = \frac{n}{2}e^{-n|x|}$ jest ciągiem $\delta$-podobnym (wzory (7.27), (7.28) w skrypcie), ponieważ $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx\right] = \frac{1}{2}\left[e^{x}\big|_{-\infty}^{0} - e^{-x}\big|_{0}^{\infty}\right] = 1.$

7.

8. Skorzystać ze wzorów $\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x_j)|}\delta(x - x_j)$, gdzie $f(x_j) = 0$ (wzór (7.69) w skrypcie) oraz $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$, gdzie $f$ - dowolna funkcja (wzór (7.34'') w skrypcie).

9. Skorzystać ze wzorów $\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x_j)|}\delta(x - x_j)$, gdzie $f(x_j) = 0$ (wzór (7.69) w skrypcie) oraz $T(x) \star \delta(x - a) = T(x - a)$, gdzie $T$ - dowolna dystrybucja (wzór (7.61') w skrypcie).

10. W pkt.(b) por. zad.1(c).

11. Uwaga: należy pamiętać, że dla $x < 0$ zachodzi $(\ln(-x))' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

12.

13. Rozwiązanie jest złożone i miejscami dość subtelne, więc zalecane jest zapoznanie się z "gotowcem" w części "Rozwiązania". Przedstawione wyprowadzenie zwykle jest omawiane na wykładzie.

*C10-C11: Dystrybucje: odpowiedzi.*

1.(a)

$$\Theta(-x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

(b)

$$\Theta(x^2 - a^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in (-a, a) \\ 1 & \text{dla} \quad x \leq -a \vee x \geq a \end{cases}$$

(c)

$$\Theta(a^2 - x^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -a \vee x > a \\ 1 & \text{dla} \quad x \in \langle -a, a \rangle \end{cases}$$

(d)

$$\Theta(-x^2 + 4x - 3) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 1 \vee x > 3 \\ 1 & \text{dla} \quad x \in \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$$

2.(a) $(a \star a)_n = \delta_{2,n} + 2\delta_{3,n} + \delta_{4,n}$,

(b) $(a \star b)_n = \delta_{2,n} + 3\delta_{3,n} + \delta_{4,n} - \delta_{5,n}$.

3.(a)

$$(f \star g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1 \\ x+1 & \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

(b)

$$(f \star g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1 \\ \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} & \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

(c)

$$(G_\alpha \star G_\beta)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}} = G_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x)$$

(d)

$$(Z_{\alpha,\lambda} \star Z_{\beta,\lambda})(x) = \Theta(x)\frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{\lambda x} = Z_{\alpha+\beta,\lambda}(x)$$

(e)

$$(P_a \star P_b)(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a+b}{x^2+(a+b)^2} = P_{a+b}(x)$$

4.(a) $I = \ln 3$

(b) $I = 0$ (druga całka daje $\ln 2$)

5.(a) $\lim_{n\to\infty} P\frac{\cos(nx)}{x} = 0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} P\frac{\cos(x/n)}{x} = P\frac{1}{x}$.

6.(a) $\delta(x-1)$,

(b) $\delta(x)$.

7. $f_n(x) = \frac{ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2}$

8.(a) $\frac{3}{4}\delta(x - \frac{3}{2})$,

(b) $\frac{1}{2}[\delta(x-2) - \delta(x+2)]$,

(c) 0

9.(a) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

(b) $\frac{1}{2}x$

(c) $\frac{1}{2}\sin(\pi x)$

10.(a) $f'(x) = -\mathrm{sgn}(x)e^{-|x|}$; $f''(x) = -2\delta + e^{-|x|}$,

(b) $f'(x) = \Theta(\pi^2 - x^2)\cos x$;
$f''(x) = \delta(x-\pi) - \delta(x+\pi) - \Theta(\pi^2 - x^2)\sin x$.

11. $P\frac{1}{x}$

12.(a) $-2\delta'(x)$,

(b) $2\delta(x)$,

(c) 0.

13. $g(r) = \frac{1}{4\pi r}e^{-kr}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+r^2}$, $k > 0$ dla równania z "+",
$g(r) = \frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}$ dla równania z "-".

*C10-C11: Dystrybucje: rozwiązania.*

1.(a)

$$\Theta(-x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \\ 1 & \text{dla} \quad -x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 0 \end{cases}$$

(b)

$$\Theta(x^2 - a^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x^2 - a^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-a, a) \\ 1 & \text{dla} \quad x^2 - a^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -a \vee x \ge a \end{cases}$$

(c)

$$\Theta(a^2 - x^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a^2 - x^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -a \vee x > a \\ 1 & \text{dla} \quad a^2 - x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -a, a \rangle \end{cases}$$

(d)

$$\Theta(-x^2 + 4x - 3) = \Theta(-(x-1)(x-3)) =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -(x-1)(x-3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \vee x > 3 \\ 1 & \text{dla} \quad -(x-1)(x-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$$

2.(a)

$$\begin{aligned} (a \star a)_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} a_k = \sum_k (\delta_{1,n-k} + \delta_{2,n-k})(\delta_{1,k} + \delta_{2,k}) \\ &= \sum_k \delta_{1,n-k}\delta_{1,k} + \sum_k \delta_{1,n-k}\delta_{2,k} + \sum_k \delta_{2,n-k}\delta_{1,k} + \sum_k \delta_{2,n-k}\delta_{2,k} \\ &= \delta_{1,n-1} + \delta_{1,n-2} + \delta_{2,n-1} + \delta_{2,n-2} \\ &= \delta_{2,n} + 2\delta_{3,n} + \delta_{4,n}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy ciąg o wyrazach $(a \star a)_2 = 1$, $(a \star a)_3 = 2$, $(a \star a)_4 = 1$, $(a \star a)_n = 0$ dla $n \neq 2, 3, 4$.

(b)

$$\begin{aligned} (a \star b)_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k = \sum_k (\delta_{1,n-k} + \delta_{2,n-k})(\delta_{1,k} + 2\delta_{2,k} - \delta_{3,k}) \\ &= \sum_k \delta_{1,n-k}\delta_{1,k} + 2\sum_k \delta_{1,n-k}\delta_{2,k} - \sum_k \delta_{1,n-k}\delta_{3,k} \\ &+ \sum_k \delta_{2,n-k}\delta_{1,k} + 2\sum_k \delta_{2,n-k}\delta_{2,k} - \sum_k \delta_{2,n-k}\delta_{3,k} \\ &= \delta_{1,n-1} + 2\delta_{1,n-2} - \delta_{1,n-3} + \delta_{2,n-1} + 2\delta_{2,n-2} - \delta_{2,n-3} \\ &= \delta_{2,n} + 3\delta_{3,n} + \delta_{4,n} - \delta_{5,n}. \end{aligned}$$

3.(a) $f(x) = \Theta(1 - x^2)$, $g(x) = \Theta(x) \Rightarrow$

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(1 - t^2)\Theta(x - t)dt = \int_{-1}^{1} \Theta(x - t)dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1 \\ \int_{-1}^{x} dt = x + 1 & \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \int_{-1}^{1} dt = 2 & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

(b) $f(x) = x^2\Theta(1 - x^2)$, $g(x) = x\Theta(x) \Rightarrow$

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\Theta(1 - t^2)(x - t)\Theta(x - t)dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2(x - t)\Theta(x - t)dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1 \\ \int_{-1}^{x} t^2(x - t)dt = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} & \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \int_{-1}^{1} t^2(x - t)dt = \frac{2}{3}x & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned} (G_\alpha \star G_\beta)(x) &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\alpha^2} - \frac{t^2}{2\beta^2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{xt}{\alpha^2} - \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(t - \frac{\beta^2 x}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Dokonujemy podstawienia $u = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\beta}\left(t - \frac{\beta^2 x}{\alpha^2+\beta^2}\right) \Rightarrow dt = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow (G_\alpha \star G_\beta)(x) &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}} \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{=\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}} = G_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x). \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że dla splotu $n$ rozkładów Gaussa otrzymujemy $G_\sigma \star G_\sigma \ldots \star G_\sigma = G_{\sqrt{n}\sigma}$.

(d)

$$(Z_{\alpha,\lambda} \star Z_{\beta,\lambda})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x - t)\frac{(x - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda(x-t)}\Theta(t)\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{\lambda t} dt.$$

Ponieważ $\Theta(x - t) > 0 \Leftrightarrow t < x$, $\Theta(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0$, funkcja podcałkowa jest niezerowa dla $0 < t < x$, przy czym musi zachodzić $x > 0$; jeżeli te warunki nie są spełnione, w wyniku całkowania otrzymujemy zero. Stąd

$$(Z_{\alpha,\lambda} \star Z_{\beta,\lambda})(x) = \Theta(x)\frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt.$$

Podstawiając $t = xu \Rightarrow dt = xdu$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(Z_{\alpha,\lambda} \star Z_{\beta,\lambda})(x) &= \Theta(x)\frac{x^{\alpha+\beta-1}e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du \\ &= \Theta(x)\frac{x^{\alpha+\beta-1}e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\beta(\alpha,\beta) \\ &= \Theta(x)\frac{x^{\alpha+\beta-1}e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \Theta(x)\frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{\lambda x} = Z_{\alpha+\beta,\lambda}(x).\end{aligned}$$

(e)

$$(P_a \star P_b)(x) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+t^2}\frac{b}{(x-t)^2+b^2}dt.$$

Rozważmy całkę z funkcji zespolonej

$$f(z) = \frac{1}{\pi^2}\frac{a}{a^2+z^2}\frac{b}{(x-z)^2+b^2}$$

po konturze $C$ złożonym z odcinka $(-R,R)$ domkniętego w górnej półpłaszczyźnie półokregiem $C_R$ o środku $(0,0)$ i promieniu $R$. Funkcja podcałkowa ma bieguny w punktach $z_1 = ia$, $z_2 = -ia$, $z_3 = x+ib$, $z_4 = x-ib$, z których $z_1$ i $z_3$ należą do wnętrza konturu $C$.

Łatwo sprawdzić, że dla $R \to \infty$ na półokręgu $C_R$, tj. dla $z = Re^{i\phi}$, $\phi \in (0,\pi)$ zachodzi $|f(z)| \propto 1/R^4$, więc $\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \propto 2\pi R/R^4 \xrightarrow{R\to\infty} 0$, więc $\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = (P_a \star P_b)(x)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_1} f(z) &= \frac{ab}{\pi^2}\frac{1}{2ia[x-i(a-b)][x-i(a+b)]}, \\ \operatorname{res}_{z_3} f(z) &= \frac{ab}{\pi^2}\frac{1}{2ib[x-i(a-b)][x+i(a+b)]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= 2\pi i[\operatorname{res}_{z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z_3} f(z)] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{x-i(a-b)}\left[\frac{b}{x-i(a+b)} + \frac{a}{x+i(a+b)}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{a+b}{x^2+(a+b)^2} = P_{a+b}(x) = (P_a \star P_b)(x).\end{aligned}$$

4.(a)

$$\begin{aligned}P\int_0^4 \frac{dx}{x-1} &= P\int_0^2 \frac{dx}{x-1} + \int_2^4 \frac{dx}{x-1} \\ &= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1}\right]}_{=0} + \int_2^4 \frac{dx}{x-1} \\ &= \ln|x-1|\big|_2^4 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.\end{aligned}$$

Całki w nawiasie kwadratowym dają w sumie zero, ponieważ funkcja podcałkowa jest "nieparzysta" względem punktu osobliwego $x = 1$; można to też wykazać, obliczając te całki bezpośrednio, ponieważ $\forall \varepsilon > 0$ są one dobrze określone i skończone.

(b) W sensie wartości głównej (przy symetrycznym przejściu do $\pm\infty$)

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{xdx}{x^2+1}=0,$$

ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta.

Widać że symetria przedziału całkowania ma znaczenie, ponieważ

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{2A}\frac{xdx}{x^2+1} &= \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{2A}\frac{2xdx}{x^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\ln|x^2+1|\Big|_{-A}^{2A}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\ln\frac{4A^2+1}{A^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\ln 4=\ln 2.\end{aligned}$$

Wynik ten jest niepoprawny, chociaż formalnie w obu przypadkach przejście z $A\to\infty$ prowadzi to tej samej całki $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+1}$.

5.(a) Niech $\varphi\in\mathcal{D}$ będzie funkcją próbną o nośniku ograniczonym do przedziału $(-A,A)$.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(P\frac{\cos(nx)}{x},\varphi\right)\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{x}\varphi(x)dx\right]\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\cos(nx)}{x}[\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)]dx\right\}\\ =\ &\varphi(0)\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\left[\int_{-A}^{-\varepsilon}\frac{\cos(nx)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\cos(nx)}{x}dx\right]}_{I_1}\\ +\ &\underbrace{\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-A}^{-\varepsilon}\cos(nx)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{A}\cos(nx)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\right]}_{I_2}.\end{aligned}$$

W całce $I_1$ $\cos(nx)$ jest funkcją parzystą, $\frac{1}{x}$ jest funkcją nieparzystą, więc $\forall\varepsilon>0$ suma obu całek wynosi zero, więc $\forall n\ \ I_1\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$. W całce $I_2$ mamy z twierdzenia Rolle'a $\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|\le\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|$, a ponieważ $\varphi\in\mathcal{D}$, funkcja $\Phi(x)\equiv\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ jest ograniczona i nieosobliwa w $x=0$, a więc całkowalna; w całce $I_2$ można więc pominąć wartość główną i szacować bezpośrednio

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_{-A}^{A}\cos(nx)\Phi(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)'\Phi(x)dx\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\Phi(x)|_{-A}^{A}-\frac{1}{n}\int_{-A}^{A}\sin(nx)\Phi'(x)dx\right].\end{aligned}$$

Ponieważ $\sin(\pm nA)\Phi(\pm A)$ są liczbami skończonymi, to $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin(nx)\Phi(x)|_{-A}^{A}=0$. Ponadto

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\int_{-A}^{A}\sin(nx)\Phi'(x)dx\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{-A}^{A}|\sin(nx)||\Phi'(x)|dx\\ \le\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{-A}^{A}|\Phi'(x)|dx\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}2A\sup_{x\in(-A,A)}|\Phi'(x)|=0\end{aligned}$$

Ostatecznie $\forall\varphi\ \ \lim_{n\to\infty}\left(P\frac{\cos(nx)}{x},\varphi\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}P\frac{\cos(nx)}{x}=0$.

(b) Niech $\varphi \in \mathcal{D}$ będzie funkcją próbną o nośniku ograniczonym do przedziału $(-A, A)$. Obie całki poniżej są bezwzględnie zbieżne dla dowolnego $\varepsilon > 0$, więc możemy zmienić kolejność obliczania granic i wejść z granicą $n \to \infty$ pod całkę,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(P\frac{\cos(x/n)}{x},\varphi\right) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos(x/n)}{x}\varphi(x)dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\cos(x/n)}{x}\varphi(x)dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x/n)}{x}\right]\varphi(x)dx\right\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\cos(0)}{x}\varphi(x)dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] = \left(P\frac{1}{x},\varphi\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie $\forall\varphi \quad \lim_{n\to\infty}\left(P\frac{\cos(x/n)}{x},\varphi\right) = \left(P\frac{1}{x},\varphi\right) \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} P\frac{\cos(x/n)}{x} = P\frac{1}{x}$.

6.(a) Dokonujemy podstawienia $y = x - 1 \Rightarrow dy = dx$,

$$\begin{aligned}
\forall\varphi \quad \lim_{n\to\infty}\left(ne^{-n|x-1|},\varphi\right) &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ne^{-n|x-1|}\varphi(x)dx \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{2}e^{-n|y|}\varphi(y+1)dy \\
&= 2(\delta(y),\varphi(y+1)) = 2\varphi(1) = (2\delta(y-1),\varphi(y)) \\
\Rightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} ne^{-n|x-1|} = 2\delta(x-1).
\end{aligned}$$

(b) Dokonujemy podstawienia $y = x - \frac{1}{n} \Rightarrow dy = dx$,

$$\begin{aligned}
\forall\varphi \quad \lim_{n\to\infty}\left(ne^{-|nx-1|},\varphi\right) &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ne^{-|nx-1|}\varphi(x)dx \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{2}e^{-n|x-1/n|}\varphi(x)dx \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{2}e^{-n|y|}\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)dy \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\left(\delta(y),\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)\right) = 2\lim_{n\to\infty}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 2\varphi(0) = (2\delta(y),\varphi(y)) \\
\Rightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} ne^{-|nx-1|} = 2\delta(x).
\end{aligned}$$

7. $-f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, $\int_{-\infty}^{\infty}(-f'(x))dx = -\left.\frac{1}{e^x+1}\right|_{-\infty}^{\infty} = 1$
$\Rightarrow f_n(x) = nf(nx) = \frac{ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta(x)$.

8.(a) $x\delta(3-2x) = \frac{1}{2}x\delta(x-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\delta(x-\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}\delta(x-\frac{3}{2})$.

(b) $x\delta(x^2-4) = \frac{1}{4}[x\delta(x-2) + x\delta(x+2)] = \frac{1}{4}[2\delta(x-2) - 2\delta(x+2)] = \frac{1}{2}[\delta(x-2) - \delta(x+2)]$.

(c) $\sin(\pi x)\delta(x^2-4) = \frac{1}{4}[\sin(\pi x)\delta(x-2) + \sin(\pi x)\delta(x+2)] = \frac{1}{4}[\sin(2\pi)\delta(x-2) + \sin(-2\pi)\delta(x+2)] = 0$.

9.(a) $x \star \delta(3-2x) = \frac{1}{2}x \star \delta(x-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}(x-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

(b) $x \star \delta(x^2-4) = \frac{1}{4}[x \star \delta(x-2) + x \star \delta(x+2)] = \frac{1}{4}(x-2+x+2) = \frac{1}{2}x$.

(c) $\sin(\pi x) \star \delta(x^2-4) = \frac{1}{4}[\sin(\pi x) \star \delta(x-2) + \sin(\pi x) \star \delta(x+2)] = \frac{1}{4}\{\sin[(x-2)\pi] + \sin[(x+2)\pi]\} = \frac{1}{2}\sin(\pi x)$.

10.(a) Pamiętamy, że dla funkcji próbnych $\varphi(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

i.

$$
\begin{aligned}
\left((e^{-|x|})', \varphi\right) &= -(e^{-|x|}, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{x}\varphi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} e^{-x}\varphi'(x)dx \\
&= -\left[e^{x}\varphi(x)|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{x}\varphi(x)dx\right] - \left[e^{-x}\varphi(x)|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\varphi(x)dx\right] \\
&= -\left[\varphi(0) - \int_{-\infty}^{0} e^{x}\varphi(x)dx\right] - \left[-\varphi(0) + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\varphi(x)dx\right] \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x}\varphi(x)dx - \int_{0}^{\infty} e^{-x}\varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\varphi(x)dx - \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}\varphi(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}\varphi(x)dx = \left(-\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}, \varphi\right) \\
\Rightarrow (e^{-|x|})' &= -\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}.
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
\left((e^{-|x|})'', \varphi\right) &\overset{(i.)}{=} \left((-\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|})', \varphi\right) = \left(\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}, \varphi'\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{x}\varphi'(x)dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\varphi'(x)dx \\
&\overset{(i.)}{=} -2\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\varphi(x)dx = \left(-2\delta + e^{-|x|}, \varphi\right) \\
\Rightarrow (e^{-|x|})'' &= -2\delta + e^{-|x|}.
\end{aligned}
$$

Uwaga: widać że skok pochodnej dystrybucyjnej $(e^{-|x|})'$ w punkcie $x = 0$ o 2 jednostki w dół prowadzi do pojawienia się w drugiej pochodnej dystrybucji $-2\delta(x)$. Jest to przejaw ogólniejszej zasady, że przy obliczaniu pochodnej dystrybucyjnej funkcji nieciągłej każdemu skokowi wartości funkcji o $\Delta f$ w punkcie $x_0$ odpowiada w pochodnej pojawienie się dystrybucji $\delta(x-x_0)$.

(b)

$$
\Theta(\pi^2 - x^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in (-\infty, -\pi) \cup (\pi, \infty) \\ 1 & \text{dla} \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle \end{cases}
$$

i.

$$\begin{aligned}
\Big((\Theta(\pi^2-x^2)\sin x)',\varphi\Big) &= -\Big(\Theta(\pi^2-x^2),\varphi'\sin x\Big)\\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x)\sin x dx\\
&= -\left[\varphi(x)\sin x|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos x dx\right]\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos x dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\Theta(\pi^2-x^2)\cos x dx\\
&= \Big(\Theta(\pi^2-x^2)\cos x,\varphi\Big)\\
\Rightarrow (\Theta(\pi^2-x^2)\sin x)' &= \Theta(\pi^2-x^2)\cos x.
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\Big((\Theta(\pi^2-x^2)\sin x)'',\varphi\Big) &\overset{\text{(i.)}}{=} \Big((\Theta(\pi^2-x^2)\cos x)',\varphi\Big)\\
&= -\Big(\Theta(\pi^2-x^2)\cos x,\varphi'\Big) = -\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x)\cos x dx\\
&= -\left[\varphi(x)\cos x|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin x dx\right]\\
&= \varphi(\pi)-\varphi(-\pi)-\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin x dx\\
&= \Big(\delta(x-\pi)-\delta(x+\pi)-\Theta(\pi^2-x^2)\sin x,\varphi\Big)\\
\Rightarrow (\Theta(\pi^2-x^2)\sin x)'' &= \delta(x-\pi)-\delta(x+\pi)-\Theta(\pi^2-x^2)\sin x.
\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
\big((\ln|x|)',\varphi\big) &= -\big(\ln|x|,\varphi'\big) = -\int_{-\infty}^{\infty}(\ln|x|)\varphi'(x)dx\\
&= -\left[\int_{-\infty}^{0}(\ln(-x))\varphi'(x)dx+\int_{0}^{\infty}(\ln x)\varphi'(x)dx\right]\\
&= -\left[(\ln(-x))\varphi(x)|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}\varphi(x)dx+(\ln x)\varphi(x)|_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)dx\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-(\ln(-x))\varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi(x)dx-(\ln x)\varphi(x)|_{\varepsilon}^{\infty}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)dx\right].
\end{aligned}$$

Ponieważ dla funkcji próbnych $\varphi(x)\overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$ oraz po rozwinięciu $\varphi(\varepsilon)$ na szereg Taylora i skorzystaniu z reguły de l'Hospitale'a $\lim_{\varepsilon\to 0}[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)]\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}[\varphi(0)+\varphi'(0)\varepsilon-\varphi(0)-\varphi'(0)(-\varepsilon)]\ln\varepsilon = 2\varphi'(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon \overset{H}{=} 0$,

$$\begin{aligned}
\big((\ln|x|)',\varphi\big) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\varphi(-\varepsilon)\ln\varepsilon+\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon+\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}dx\right)\frac{\varphi(x)}{x}\right]\\
&= \left(P\frac{1}{x},\varphi\right)\Rightarrow(\ln|x|)'=P\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

12.(a)

$$\begin{aligned}(x\delta'', \varphi) &= ((\delta')', x\varphi) = -(\delta', (x\varphi)') = -(\delta', \varphi + x\varphi') = (\delta, (\varphi + x\varphi')') \\ &= (\delta, 2\varphi' + x\varphi'') = 2\varphi'(0) = (2\delta, \varphi') = -(2\delta', \varphi) \Rightarrow x\delta'' = -2\delta'.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(x^2\delta'', \varphi) &= (x\delta'', x\varphi) \overset{(a)}{=} (-2\delta', x\varphi) = 2(\delta, (x\varphi)') = 2(\delta, \varphi + x\varphi') \\ &= 2\varphi(0) = (2\delta, \varphi) \Rightarrow x^2\delta'' = 2\delta.\end{aligned}$$

(c)

$$(x^3\delta'', \varphi) = (x^2\delta'', x\varphi) \overset{(b)}{=} (2\delta, x\varphi) = 0 \Rightarrow x^3\delta'' = 0.$$

13. Wykażemy, że funkcja

$$g(r) = \frac{1}{4\pi r}e^{-kr}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + r^2}, \quad k > 0 \quad (\spadesuit)$$

jako dystrybucja spełnia równanie Helmholtza

$$(-\nabla^2 + k^2)g = \delta(\vec{r}), \quad \vec{r} = (x, y, z).(\clubsuit)$$

W szczególności dla $k = 0$ z ($\spadesuit$, $\clubsuit$) mamy równanie Laplace'a dla potencjału Coulomba,

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}).$$

(1) Zauważmy, że $g(r) = \frac{1}{4\pi r}e^{-kr}$ dla $r \neq 0$ spełnia równanie Helmholtza. Ponieważ $g = g(r)$, do obliczenia laplasjanu w zmiennych sefrycznych wystarczy skorzystać tylko z jego części radialnej. Ponieważ dla $r \neq 0$ funkcja $g = g(r)$ jest nieosobliwa, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\nabla^2 g &= \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rg(r)) = \frac{1}{4\pi r}\frac{d^2}{dr^2}(e^{-kr}) \\ &= \frac{1}{4\pi r}k^2e^{-kr} \Rightarrow (-\nabla^2 + k^2)g = 0 \text{ dla } r \neq 0.\end{aligned}$$

(2) W sensie dystrybucyjnym, dla dowolnej funkcji próbnej $\varphi(\vec{r}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, korzystając z definicji pochodnej dystrybucyjnej, mamy

$$\begin{aligned}(\nabla^2 g, \varphi) &= (-1)^2(g, \nabla^2\varphi) = (g, \nabla^2\varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr r^2 \sin\theta g(r)\nabla^2\varphi(\vec{r}) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dr \frac{1}{4\pi} r e^{-kr}\nabla^2\varphi(\vec{r}),\end{aligned}$$

przy czym ostatnią całkę potrójną należy oczywiście rozumieć jako zwykłą całkę funkcyjną.

(3) Zauważmy że w ostatniej całce funkcja podcałkowa $(4\pi)^{-1}re^{-kr}\nabla^2\varphi(\vec{r})$ nie ma osobliwości przy $r \to 0$ ( w szczególności $\varphi(\vec{r}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, więc $\nabla^2\varphi(\vec{r})$ nie ma osobliwości przy $r \to 0$). Stąd $(4\pi)^{-1}re^{-kr}\nabla^2\varphi(\vec{r}) \xrightarrow{r\to 0} 0$, można więc napisać

$$\begin{aligned}(g, \nabla^2\varphi) &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_\varepsilon^R dr \frac{1}{4\pi} re^{-kr}\nabla^2\varphi(\vec{r}) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_\varepsilon^R drr^2 g(r)\nabla^2\varphi(\vec{r})\end{aligned}$$

Ponieważ całka objętościowa w p.(3) jest zwykłą całką funkcyjną po objętoiści ograniczonej dwiema sferami, o promieniach $\varepsilon$ i $R$, w celu jej obliczenia możemy skorzystać z twierdzenia Greena: dla dowolnych funkcji $\psi(\vec{r})$, $\eta(\vec{r})$ klasy $C_2(\mathbb{R}^3)$ całkę objętościową po objętości $V$ można zastąpić przez całkę powierzchniową po powierzchni $S$ ograniczającej objętość $V$ w następujący sposób,

$$\iiint_V \Big(\psi(\vec{r})\nabla^2\eta(\vec{r}) - \nabla^2\psi(\vec{r})\eta(\vec{r})\Big)\, dV = \iint_S \left(\psi(\vec{r})\frac{d\eta}{d\vec{n}} - \frac{d\psi}{d\vec{n}}\eta(\vec{r})\right) dS, \quad (\heartsuit)$$

gdzie $\frac{d}{d\vec{n}}$ oznacza pochodną wektorową (normalną) w kierunku prostopadłym do powierzchni $S$, wyznaczanym przez wektor jednostkowy $\vec{n}$ skierowany na zewnątrz powierzchni zamkniętej.

(4) Przyjmując w tw. Greena $(\heartsuit)$ $\psi = g$, $\eta = \varphi$ i całkując we współrzędnych sferycznych, możemy napisać

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_\varepsilon^R drr^2 \left( g(r)\nabla^2\varphi(\vec{r}) - \underbrace{\nabla^2 g(r)}_{\overset{(1)}{=}k^2 g} \varphi(\vec{r}) \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{S_\varepsilon} \left(g(r)\frac{d\varphi}{d\vec{n}} - \frac{dg}{d\vec{n}}\varphi(\vec{r})\right) dS + \quad (\triangle)$$

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{S_R} \left(g(r)\frac{d\varphi}{d\vec{n}} - \frac{dg}{d\vec{n}}\varphi(\vec{r})\right) dS, \quad (\square)$$

gdzie $S_\varepsilon$, $S_R$ oznaczają sfery o srodku w początku układu współrzędnych i promieniach $\varepsilon$, $R$, odpowiednio.

(5) Całka $(\square) = 0$, ponieważ $\varphi$ jest funkcją próbną o nośniku ograniczonym, więc dla $R \to \infty$ mamy $\varphi(R) = 0$, $\left.\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right|_{r=R} = 0$.

(6) W całce $(\triangle)$ oszacujmy najpierw pierwszą całkę. Ponieważ $\varphi$ jest funkcją próbną klasy $C_\infty(\mathbb{R}^3)$, wszelkie pochodne funkcji $\varphi$ są ograniczone z góry i można oszacować $\left.\left|\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right|\right|_{\vec{r}\in S_\varepsilon} =$

$$\left|\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right|\Big|_{r=\varepsilon} \leq \sup_{r=\varepsilon}\left|\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right| \equiv A$$

$$\begin{aligned}\left|\iint_{S_\varepsilon} g(r)\frac{d\varphi}{d\vec{n}}dS\right| &= \left|g(\varepsilon)\iint_{S_\varepsilon}\frac{d\varphi}{d\vec{n}}dS\right| \leq |g(\varepsilon)|\iint_{S_\varepsilon}\left|\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right|dS \\ &\leq \frac{e^{-k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon}A4\pi\varepsilon^2 \propto \varepsilon e^{-k\varepsilon} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

(7) Drugą całkę w ($\triangle$) rozdzielmy na dwie,

$$\iint_{S_\varepsilon}\frac{dg}{d\vec{n}}\varphi(\vec{r})dS = \iint_{S_\varepsilon}\frac{dg}{d\vec{n}}[\varphi(\vec{r})-\varphi(0)]dS + \varphi(0)\iint_{S_\varepsilon}\frac{dg}{d\vec{n}}dS \quad (\bigcirc)$$

(8) Obliczamy drugą całkę w ($\bigcirc$). Pochodna normalna w kierunku $\vec{n}$ na powierzchni $S_\varepsilon$ jest pochodną względem $r$ z minusem (ponieważ objętość $V$ w p.(3) to obszar $\varepsilon < r < R$, to kierunek na zewnątrz powierzchni $S_\varepsilon$ jest ku środkowi układu współrzędnych, stąd minus), więc

$$\frac{dg}{d\vec{n}} = -\frac{dg}{dr} = -\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi r^2}e^{-kr}(kr+1) \quad (\diamond)$$

$$\Rightarrow \iint_{S_\varepsilon}\frac{dg}{d\vec{n}}dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}e^{-k\varepsilon}(k\varepsilon+1)4\pi\varepsilon^2 = e^{-k\varepsilon}(k\varepsilon+1) \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

(9) Aby oszacować pierwszą całkę w ($\bigcirc$) korzystamy ponownie z faktu, że $\varphi$ jest funkcją próbną klasy $C_\infty(\mathbb{R}^3)$ o wszystkich pochodnych ograniczonych, więc (jak zobaczymy, w rozwinięciu na szereg Taylora wystarczy zachować wyrazy liniowe względem $\varepsilon$),

$$\begin{aligned} & |\varphi(\vec{r})-\varphi(0)|\,|_{\vec{r}=(x,y,z)\in S_\varepsilon} \\ \approx\ & \left|\varphi(0)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{\vec{r}=0}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{\vec{r}=0}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{\vec{z}=0}z+\ldots-\varphi(0)\right| \\ \leq\ & \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{\vec{r}=0}\right||x|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{\vec{r}=0}\right||y|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{\vec{r}=0}\right||z|+O(\varepsilon^2) \\ \leq\ & 3\max\left\{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{\vec{r}=0}\right|,\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{\vec{r}=0}\right|,\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{\vec{r}=0}\right|\right\}\varepsilon+O(\varepsilon^2) \equiv C\varepsilon+O(\varepsilon^2) \quad (\bigstar)\end{aligned}$$

Stąd pierwsza całka w ($\bigcirc$)

$$\begin{aligned}\left|\iint_{S_\varepsilon}\frac{dg}{d\vec{n}}[\varphi(\vec{r})-\varphi(0)]dS\right| &\leq \iint_{S_\varepsilon}\left|\frac{dg}{d\vec{n}}\right||\varphi(\vec{r})-\varphi(0)|\,dS \\ &\stackrel{(\diamond),(\bigstar)}{\leq} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}e^{-k\varepsilon}(k\varepsilon+1)[C\varepsilon+O(\varepsilon^2)]4\pi\varepsilon^2 \\ &\propto \varepsilon e^{-k\varepsilon}(k\varepsilon+1)+O(\varepsilon^2)e^{-k\varepsilon}(k\varepsilon+1) \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

(widać że wyrazy rzędu $\varepsilon^2$ są w powyższym oszacowaniu nieistotne).

(10) Ostatecznie z p.(6-9) wynika, że wkład do całki (△) w p.(4) wnosi tylko druga całka w (◯) w p.(7), obliczona w p.(8),

$$(\triangle) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{S_\varepsilon} \left( g(r)\frac{d\varphi}{d\vec{n}} - \frac{dg}{d\vec{n}}\varphi(\vec{r}) \right) dS = -\varphi(0) = -(\delta,\varphi).$$

(11) Z (4), biorąc pod uwagę wyniki (5), (10) i korzystając z p.(3) i (2), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
-(\delta,\varphi) &= -\varphi(0) \\
&\overset{(5,10)}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_\varepsilon^R dr r^2 \left( g(r)\nabla^2\varphi(\vec{r}) - k^2 g(r)\varphi(\vec{r}) \right) \\
&\overset{(3)}{=} \underbrace{(g(r),\nabla^2\varphi(\vec{r})) - (1, k^2 g(r)\varphi(\vec{r}))}_{\text{w sensie funkcyjnym}} \\
&\overset{(2)}{=} \underbrace{(\nabla^2 g(r),\varphi(\vec{r})) - (k^2 g(r),\varphi(\vec{r}))}_{\text{w sensie dystrybucyjnym}} = ((\nabla^2 - k^2)g(r),\varphi(r)).
\end{aligned}$$

Ponieważ powyższa równość dystrybucyjna spelniona jest dla dowolnej funkcji próbnej $\varphi$, otrzymujemy szukany związek dystrybucyjny

$$(\nabla^2 - k^2)g(r) = -\delta(\vec{r}), \quad g(r) = \frac{1}{4\pi r}e^{-kr} \quad (\clubsuit) \quad \text{cbdo.}$$

Uwaga. Powyższe rozważania pozostają w mocy, jeśli w funkcji $g(r)$ dokonamy zamiany $k \to ik$. Z p.(1) otrzymamy wówczas, że dla $r \neq 0$ w sensie funkcyjnym $g(r) = \frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}$ spełnia równanie $(-\nabla^2 - k^2)g(r) = 0$. Z kolei powtarzając rozumowanie z p.(2-11) łatwo pokazać, że w sensie dystrybucyjnym tak zdefiniowana funkcja $g(r)$ spełnia równanie $(-\nabla^2 - k^2)g(r) = -\delta(\vec{r})$.

## C12-C13: *Transformacja Fouriera*

### *C12-C13: Transformacja Fouriera: treść zadań.*

1. Obliczyć transformaty Fouriera dla funkcji
   (a) $f(x) = e^{-|x|}$,
   (b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$,
   (c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,
   (d) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$.
2. Obliczyć dwuwymiarowe transformaty Fouriera dla funkcji
   (a) $f(x,y) = \Theta(R-r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$,
   (b) $f(x,y) = \frac{1}{r}e^{-\alpha r}$.

Przyjmujemy definicję transformaty dwuwymiarowej $f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r})$, $\vec{r} = (x,y)$, $\vec{k} = (k_x, k_y)$

3. Obliczyć trójwymiarowe transformaty Fouriera dla funkcji
   (a) $f(x,y,z) = \Theta(R-r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
   (b) $f(x,y,z) = \frac{1}{r}e^{-\alpha r}$.

Przyjmujemy definicję transformaty trójwymiarowej $f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r})$, $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

4. Obliczyć dystrybucyjne transformaty Fouriera dla funkcji lub dystrybucji
   (a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$,
   (b) $f(x) = \cos^2 x$,
   (c) $f(x) = x \sin x$,
   (d) $f(x) = P\frac{1}{x}$.
5. Znaleźć szczególne rozwiązania równania
   (a) $\varphi''(x) - 4\varphi(x) = \delta(x)$,
   (b) $\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi(x) = \delta(x)$.

*C12-C13: Transformacja Fouriera: wskazówki.*

1. Przyjmujemy definicję transformaty prostej $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx$.

   W zad. (b)-(d) należy skorzystać z lematu Jordana. Rozpatrujemy całkę zespoloną $\oint_C e^{-ikz} f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{-ikx} f(x)dx + \int_{C_R} e^{-ikz} f(z)dz$ po konturze $C$ złożonym z odcinka $(-R, R)$ na osi rzeczywistej i domykającego półokręgu o promieniu $R$ w górnej lub dolnej półpłaszczyźnie, w zależności od znaku $k$, i przechodzimy z $R \to \infty$. Funkcja $f(z)$ na półokręgu $C_R$ jest bezwzględnie zbieżna do zera przy $R \to \infty$, $\lim_{R\to\infty} |f(Re^{i\varphi})| = 0$, $\varphi \in (0, \pi)$ dla $C_R$ w górnej półpłaszczyźnie lub $\varphi \in (0, -\pi)$ dla $C_R$ w dolnej półpłaszczyźnie; można to udowodnić jak w zad. 7(b) z serii C2: Funkcje zespolone, otrzymując oszacowania

$$\left|\frac{1}{z^2+1}\right| \le \frac{1}{R^2-1} < \frac{2}{R^2} \xrightarrow{R\to 0} 0,$$

$$\left|\frac{z}{z^2+1}\right| \le \frac{R}{R^2-1} < \frac{2}{R} \xrightarrow{R\to 0} 0.$$

   Można więc skorzystać z lematu Jordana, otrzymując $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{-ikz} f(z)dz = 0$, skąd $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\oint_C e^{-ikz} f(z)dz$. Bieguny funkcji podcałkowej $z_1 = -i$, $z_2 = i$.

2. Wyznaczmy najpierw ogólną postać transformaty funkcji $f = f(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Dla konkretnego wektora falowego $\vec{k} = (k_x, k_y)$ przyjmujemy, że kartezjański układ współrzędnych ma oś $Ox$ równoległą do wektora $\vec{k}$. Zapisując $\vec{r} = (x, y)$ w biegunowym układzie współrzędnych, związanym z ww. układem kartezjańskim, mamy $\vec{r} = r(\cos\phi, \sin\phi)$ oraz $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\phi$. Całkując w biegunowym układzie współrzędnych, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\sqrt{x^2+y^2}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr r e^{-ikr\cos\phi} f(r) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} dr r f(r) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi e^{-ikr\cos\phi}}_{=I_1}.
\end{aligned}$$

   Aby obliczyć całkę $I_1$, skorzystajmy z całkowego przedstawienia funkcji Bessela (wzór (6.20′) w skrypcie), $J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0 2\pi e^{ix\cos\phi} d\phi \Rightarrow$ (kreska oznacza sprzężenie zespolone)

$$I_1 = \overline{\int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr\cos\phi}} = 2\pi\overline{J_0(kr)} = 2\pi J_0(kr).$$

   Stąd ogólna postać transformaty funkcji $f(r)$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} r f(r) J_0(kr) dr.$$

3. Podobnie jak w zad. 2, wyznaczmy najpierw ogólną postać transformaty funkcji $f = f(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Dla konkretnego wektora falowego $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ przyjmujemy, że kartezjański układ współrzędnych ma oś $Oz$ równoległą do wektora $\vec{k}$. Zapisując $\vec{r} = (x, y, z)$ w sferycznym układzie współrzędnych, związanym z ww. układem kartezjańskim, mamy $\vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ oraz $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$. Całkując w sferycznym układzie współrzędnych, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-ikr\cos\theta} f(r) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} dr r^2 f(r) \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta e^{-ikr\cos\theta}}_{=I_1}
\end{aligned}$$

Całkę $I_1$ obliczamy przez podstawienie $u = \cos\theta \Rightarrow \sin\theta d\theta = -du$,

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_1^{-1} du e^{-ikru} = \int_{-1}^{1} du e^{-ikru} \\
&= \int_{-1}^{1}\cos(kru)du - i\underbrace{\int_{-1}^{1}\sin(kru)du}_{=0} \\
&= \frac{1}{kr}\sin(kru)|_{-1}^{1} = \frac{2}{k}\frac{\sin(kr)}{r}.
\end{aligned}$$

Stąd ogólna postać transformaty funkcji $f(r)$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{2}{(2\pi)^2 k}\int_0^{\infty} r f(r)\sin(kr)dr.$$

4.(a) Można skorzystać ze wzoru $(x^n)^\wedge = i^n\delta^{(n)}(k)$ (wzór (8.37) ze skryptu) i wyniku zad.1(c).

(b) Można skorzystać ze wzoru na transformatę iloczynu dwóch funkcji $(\varphi_1\varphi_2)^\wedge(k) = \hat{\varphi}_1(k)\star\hat{\varphi}_2(k)$ (wzór (8.12) ze skryptu -uwaga na błąd, we wzorze w skrypcie nie powinno być czynnika $\frac{1}{2\pi}$), transformatę funkcji $\sin x$, $(\sin x)^\wedge = \frac{1}{2i}[\delta(k-1) - \delta(k+1)]$, transformatę funkcji przesuniętej $(\varphi(x-a))^\wedge = e^{-ika}(\varphi(x))^\wedge(k)$, skąd obliczamy transformatę funkcji $\cos x$,

$$\begin{aligned}
(\cos x)^\wedge(k) &= \left(-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)^\wedge(k) = -e^{-ik\pi/2}(\sin x)^\wedge(k) \\
&= -e^{-ik\pi/2}\frac{1}{2i}[\delta(k-1)-\delta(k+1)] \\
&= -\frac{1}{2i}\left[e^{-i\pi/2}\delta(k-1) - e^{i\pi/2}\delta(k+1)\right] \\
&= -\frac{1}{2i}[-i\delta(k-1) - i\delta(k+1)] = \frac{1}{2}[\delta(k-1)+\delta(k+1)],
\end{aligned}$$

oraz ze wzoru na splot z deltą przesuniętą o $a$, $T \star \delta(x-a) = T(x-a)$ (wzór (7.61′) w skrypcie).

(c) Por. wskazówka do pkt.(a) i (b); ponadto $T \star \delta' = T'$ (wzór (7.62) w skrypcie).

(d) Obliczenie jest dość złożone, zalecane jest zapoznanie się z rozwiązaniem.

5. Należy wykonać transformatę Fouriera obu stron równania, korzystając ze wzoru na transformatę pochodnej $(\varphi^{(n)})^\wedge(k) = (ik)^n \hat{\varphi}(k)$ (wzór (8.1) ze skryptu) sprowadzając równanie różniczkowe do algebraicznego, wyznaczyć $\hat{\varphi}(k)$, a następnie obliczyć $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk} \hat{\varphi}(k) dk$ jako transformatę odwrotną (wzór (8.8) ze skryptu). Obliczenie transformaty odwrotnej wykonuje się, przechodząc do całki zespolonej i korzystając z lematu Jordana.

*C12-C13: Transformacja Fouriera: odpowiedzi.*

1.(a) $\hat{f}(k) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^2+1}$,

(b) $\hat{f}(k) = \frac{1}{2}e^{-|k|}$,

(c) $\hat{f}(k) = -\frac{i}{2}\mathrm{sgn}(k)e^{-|k|}$,

(d) $\hat{f}(k) = \frac{1}{4}\left(e^{-|k-1|} + e^{-|k+1|}\right)$.

2.(a) $\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi k}RJ_1(kR)$,

(b) $\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+k^2}}$.

3.(a) $\hat{f}(\vec{k}) = \frac{2R}{(2\pi k)^2}\left[\frac{\sin(kR)}{kR} - \cos(kR)\right]$,

(b) $\hat{f}(\vec{k}) = \frac{2}{(2\pi)^2}\frac{1}{\alpha^2+k^2}$.

4.(a) $\hat{f}(k) = i\delta'(k) + \frac{i}{2}e^{-|k|}\mathrm{sgn}(k)$,

(b) $\hat{f}(k) = \frac{1}{4}[\delta(k-2) + 2\delta(k) + \delta(k+2)]$,

(c) $\hat{f}(k) = \frac{1}{2}[\delta'(k-1) - \delta'(k+1)]$,

(d) $\left[P\frac{1}{x}\right]^{\wedge} = -\frac{i}{2}\mathrm{sgn}(k)$.

5.(a) $\varphi(x) = -\frac{1}{4}e^{-2|x|}$,

(b) $\varphi(x) = \Theta(x)\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

*C12-C13: Transformacja Fouriera: rozwiązania.*

1.(a) Rozważmy ogólniejszą transformatę $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-ikx}dx$, $a > 0$.

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\cos(kx)dx}_{J} - \frac{i}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\sin(kx)dx}_{=0}$$

Druga całka wynosi zero, ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta. Pierwszą całke obliczamy przez części,

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos(kx)dx &= \frac{1}{k}\int e^{ax}(\sin(kx))'dx \\
&= \frac{1}{k}e^{ax}\sin(kx) - \frac{a}{k}\int e^{ax}\sin(kx)dx \\
&= \frac{1}{k}e^{ax}\sin(kx) + \frac{a}{k^2}\int e^{ax}(\cos(kx))'dx \\
&= \frac{1}{k}e^{ax}\sin(kx) + \frac{a}{k^2}e^{ax}\cos(kx) - \frac{a^2}{k^2}\int e^{ax}\cos(kx)dx \\
\Rightarrow \int e^{ax}\cos(kx)dx &= \frac{e^{ax}}{k^2+a^2}[k\sin(kx) + a\cos(kx)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J &= \int_{-\infty}^{0} e^{ax}\cos(kx)dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos(kx)dx \\
&= \frac{e^{ax}}{k^2+a^2}[k\sin(kx) + a\cos(kx)]\Big|_{-\infty}^{0} \\
&+ \frac{e^{-ax}}{k^2+a^2}[k\sin(kx) - a\cos(kx)]\Big|_{0}^{\infty} = \frac{2a}{k^2+a^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{k^2+a^2}; \quad a = 1 \Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^2+1}.$$

(b) $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x^2+1}dx$,
$\mathrm{res}_{z_1}\frac{e^{-ikz}}{z^2+1} = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} = -\frac{e^{-k}}{2i}$,
$\mathrm{res}_{z_2}\frac{e^{-ikz}}{z^2+1} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{k}}{2i}$.

i. Dla $k < 0$ domykamy kontur $C$ w górnej półpłaszczyźnie, tylko $z_2$ leży wewnątrz $C$,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}2\pi i\,\mathrm{res}_{z_2}\frac{e^{-ikz}}{z^2+1} = \frac{1}{2}e^{k}$$

ii. Dla $k > 0$ domykamy kontur $C$ w dolnej półpłaszczyźnie, tylko $z_1$ leży wewnątrz $C$, a kierunek obiegu konturu jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, stąd znak minus,

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}2\pi i\,\mathrm{res}_{z_1}\frac{e^{-ikz}}{z^2+1} = \frac{1}{2}e^{-k}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{k} & \text{dla} \quad k \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-k} & \text{dla} \quad k > 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-|k|}$$

(c) $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{-ikx}}{x^2+1}dx$,
$\text{res}_{z_1}\frac{ze^{-ikz}}{z^2+1} = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{ze^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-k}}{2}$,
$\text{res}_{z_2}\frac{ze^{-ikz}}{z^2+1} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{ze^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{k}}{2}$.

i. Dla $k < 0$ domykamy kontur $C$ w górnej półpłaszczyźnie, tylko $z_2$ leży wewnątrz $C$,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}2\pi i \text{res}_{z_2}\frac{ze^{-ikz}}{z^2+1} = \frac{i}{2}e^{k}$$

ii. Dla $k > 0$ domykamy kontur $C$ w dolnej półpłaszczyźnie, tylko $z_1$ leży wewnątrz $C$, a kierunek obiegu konturu jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, stąd znak minus,

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}2\pi i \text{res}_{z_1}\frac{ze^{-ikz}}{z^2+1} = -\frac{i}{2}e^{-k}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \begin{cases} \frac{i}{2}e^{k} & \text{dla} \quad k \leq 0 \\ -\frac{i}{2}e^{-k} & \text{dla} \quad k > 0 \end{cases} = -\frac{i}{2}\text{sgn}(k)e^{-|k|}$$

(d) $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}cosx}{x^2+1}dx = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(k-1)x}}{x^2+1}dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(k+1)x}}{x^2+1}dx\right]$,
Korzystamy z wyniku zad. (b), w którym trzeba dokonać zamiany $k \to k \pm 1$, odpowiednio, skąd

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(k-1)x}}{x^2+1}dx &= \frac{1}{4}e^{-|k-1|} \\ \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(k+1)x}}{x^2+1}dx &= \frac{1}{4}e^{-|k+1|} \\ \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{4}\left(e^{-|k-1|} + e^{-|k+1|}\right). \end{aligned}$$

2.(a) $f(r) = \Theta(R-r) \Rightarrow$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} r\Theta(R-r)J_0(kr)dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{R} rJ_0(kr)dr.$$

$$krJ_0(kr) = \frac{d}{dr}\left[rJ_1(kr)\right] \Rightarrow rJ_0(kr) = \frac{1}{k}\frac{d}{dr}\left[rJ_1(kr)\right]$$
$$\Rightarrow \hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi k}\int_0^{R}\frac{d}{dr}\left[rJ_1(kr)\right]dr = \frac{1}{2\pi k}RJ_1(kR).$$

Korzystamy ze związku rekurencyjnego dla funkcji Bessela (wzór (6.27) w skrypcie) $\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$ $\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(\lambda x)\right] = \lambda x^{\nu}J_{\nu-1}(\lambda x)$, $\lambda = \text{const}$

(b) $f(r) = \frac{1}{r}e^{-\alpha r} \Rightarrow$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha r}J_0(kr)dr = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+k^2}}.$$

Transformata Fouriera sprowadza się do transformaty Laplace'a funkcji $J_0(kr)$ od argumentu $\alpha$ (por. zad. 7(a) z funkcji Bessela)

3.(a) $f(r) = \Theta(R-r) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\vec{k}) &= \frac{2}{(2\pi)^2 k}\int_0^\infty r\Theta(R-r)\sin(kr)dr = \frac{2}{(2\pi)^2 k}\int_0^R r\sin(kr)dr \\ &= \frac{2R}{(2\pi k)^2}\left[\frac{\sin(kR)}{kR} - \cos(kR)\right]. \end{aligned}$$

(b) $f(r) = \frac{1}{r}e^{-\alpha r} \Rightarrow$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{2}{(2\pi)^2 k}\int_0^\infty e^{-\alpha r}\sin(kr)dr = \frac{2}{(2\pi)^2 k}\frac{k}{\alpha^2+k^2} = \frac{2}{(2\pi)^2}\frac{1}{\alpha^2+k^2}.$$

Transformata Fouriera sprowadza się do transformaty Laplace'a funkcji $\sin(kr)$ od argumentu $\alpha$

4.(a)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = i\delta'(k) + \frac{i}{2}e^{-|k|}\mathrm{sgn}(k).$$

(b)

$$\begin{aligned} \left(\cos^2 x\right)^\wedge(k) &= (\cos x\cos x)^\wedge(k) = (\cos x)^\wedge(k) \star (\cos x)^\wedge(k) \\ &= \frac{1}{2}[\delta(k-1)+\delta(k+1)] \star \frac{1}{2}[\delta(k-1)+\delta(k+1)] \\ &= \frac{1}{4}[\delta(k-1)\star\delta(k-1) + 2\delta(k-1)\star\delta(k+1) + \delta(k+1)\star\delta(k+1)] \\ &= \frac{1}{4}[\delta(k-2)+2\delta(k)+\delta(k+2)]. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (x\sin x)^\wedge(k) &= \hat{x}(k)\star(\sin x)^\wedge(k) \\ &= i\delta'(k)\star\frac{1}{2i}[\delta(k-1)-\delta(k+1)] \\ &= \frac{1}{2}[\delta'(k-1)-\delta'(k+1)]. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \left(\left[P\frac{1}{x}\right]^\wedge, \varphi(k)\right) &= \left(P\frac{1}{x}, \hat{\varphi}(x)\right) \\ &= \underbrace{\int_{|x|>1}\frac{\hat{\varphi}(x)}{x}dx}_{I_1} + \lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\hat{\varphi}(x)-\hat{\varphi}(0)}{x}dx}_{I_2} + \hat{\varphi}(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{dx}{x}}_{=0} \end{aligned}$$

Ostatnia całka wynosi zero, ponieważ całkujemy funkcję nieparzystą na przedziale symetrycznym $(-1,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,1)$ w którym funkcja podcałkowa $1/x$ nie ma osobliwości.

Ponieważ $\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk}\varphi(k)dk$, to $\hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(x=0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(k)dk$, stąd

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\varepsilon<|x|<1} dx\frac{1}{x}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk(e^{-ixk}-1)\varphi(k) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\varphi(k)\left\{\underbrace{\int_{-1}^{-\varepsilon}+\int_\varepsilon^1 dx\frac{\cos(kx)-1}{x}}_{J_1=0} - i\underbrace{\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}+\int_\varepsilon^1 dx\frac{\sin(kx)}{x}\right]}_{J_2}\right\}. \end{aligned}$$

Funkcja $\sin(kx)/x$ jest parzysta i nieosobliwa w $x = 0$, wobec tego można przejść do granicy w $J_2$ i całka będzie skończona

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_2 = \int_{-1}^{1} dx \frac{\sin(kx)}{x}.$$

$J_1 = 0$, ponieważ $\cos(kx) - 1$ jest funkcją parzystą zmiennej $x$, $1/x$ jest funkcją nieparzystą, więc funkcja podcałkowa $(\cos(kx) - 1)/x$ jest nieparzysta, a przedział całkowania $(-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$ jest symetryczny i funkcja podcałkowa nie ma w nim osobliwości.

Ponadto

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|x|>1} dx \frac{1}{x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ixk} \varphi(k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k) \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty} dx \frac{\cos(kx)}{x}}_{K_1=0} - i \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x} \right]}_{K_2} \right\}. \end{aligned}$$

$K_1 = 0$ (jako całka niewłaściwa obliczana w sensie wartości głównej) ponieważ funkcja podcałkowa $\cos(kx)/x$ jest nieparzysta, a przedział całkowania $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ jest symetryczny i funkcja podcałkowa nie ma w nim osobliwości.

Ostatecznie

$$\begin{aligned} \left( \left[ P\frac{1}{x} \right]^{\wedge}, \varphi(k) \right) &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k) \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x} \right] + \int_{-1}^{1} dx \frac{\sin(kx)}{x} \right\} \\ &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x}. \quad (\spadesuit) \end{aligned}$$

Ostatnią całkę obliczamy, korzystając ze znanej całki $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$. Uwaga. Dokonujac zamiany zmiennych $t = kx \Rightarrow dt = kdx$ należy pamiętać, że dla $k < 0$ zmieniają się również granice całkowania.

$$\begin{aligned} k < 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{kx} kdx = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\pi, \\ k > 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{kx} kdx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi. \end{aligned}$$

Podstawiając ten wynik do $(\spadesuit)$ otrzymujemy

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \left( \left[ P\frac{1}{x} \right]^{\wedge}, \varphi(k) \right) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(k) \varphi(k) dk \Rightarrow \left[ P\frac{1}{x} \right]^{\wedge} = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(k).$$

5.(a) Transformując obustronnie równanie różniczkowe, otrzymujemy

$$\begin{aligned} -k^2 \hat{\varphi}(k) - 4\hat{\varphi}(k) &= \frac{1}{2\pi} \\ \hat{\varphi}(k) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{k^2 + 4} \end{aligned}$$

Odwracając transformatę, otrzymujemy

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 + 4} dk.$$

Podobną całke obliczyliśmy już w zad.1(b). Dokonując podstawienia $k = 2\kappa$ i korzystajac z faktu, że funkcja $1/(\kappa^2+1)$ jest rzeczywista, uzyskujemy (kreska oznacza sprzężenie zespolone)

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(2x)\kappa}}{\kappa^2+1}d\kappa} \overset{\text{zad.1(b)}}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{-|2x|} = -\frac{1}{4}e^{-2|x|}.$$

(b) Transformując obustronnie równanie różniczkowe, otrzymujemy

$$-k^2\hat{\varphi}(k) + ik\hat{\varphi}(k) + \hat{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi},$$
$$\hat{\varphi}(k) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{k^2 - ik - 1}.$$

Rozpatrujemy funkcję zespoloną $f(z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ixz}}{z^2-iz-1}$. Bieguny rzędu pierwszego:

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ \ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{z=z_1} f(z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ixz_1}}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi}e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x} \\
\mathrm{res}_{z=z_2} f(z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ixz_2}}{z_2 - z_1} = -\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}e^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x}
\end{aligned}$$

(i.) Dla $x > 0$ rozpatrujemy całkę zespoloną $\oint_C f(z)dz$ po krzywej zamkniętej, składajacej się z odcinka $(-R, R)$, $R \to \infty$, i domykającego półokręgu $C_R$ w górnej półpłaszczyźnie. Oba bieguny $z_1$, $z_2$ zawarte są wewnątrz krzywej $C$, na mocy lematu Jordana $\int_{C_R} f(z)dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$, więc dla $R \to \infty$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixk}}{k^2-ik-1}dk = -\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{e^{ixz}}{z^2-iz-1}dz \\
&= 2\pi i(\mathrm{res}_{z=z_1} f(z) + \mathrm{res}_{z=z_2} f(z)) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}2i\frac{e^{i\sqrt{3}x/2} - e^{-i\sqrt{3}x/2}}{2i} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).
\end{aligned}$$

(ii.) Dla $x < 0$ domykamy kontur w dolnej półpłaszczyźnie. Ponieważ wewnątrz konturu $f(z)$ nie ma biegunów, $\varphi(x) = \oint_C f(z)dz = 0$.

Ostatecznie

$$\varphi(x) = \Theta(x)\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

# *C14: Szeregi Fouriera*

## *C14: Szeregi Fouriera: treść zadań.*

1. Napisać wykładniczy i trygonometryczny szereg Fouriera dla funkcji okresowych

   (a) $f(x) = \sin^3 x$,

   (b) $f(x) = 1$ dla $x \in \langle 0, 1)$, $f(x) = 0$ dla $x \in \langle 1, 2)$,

   (c) $f(x) = x^2$ dla $x \in \langle -1, 1)$.

2. Rozwinąć w (wykładniczy i trygonometryczny) szereg Fouriera dystrybucje

   (a) $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2m - 1)$,

   (b) $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(x - 4m - 1) - \delta(x - 4m - 2)]$,

   (c) $f(x) = \delta(\sin x)$.

3. Napisać skończony szereg Fouriera $A_\nu$ dla ciągu $A_n = \delta_{1,n} + \delta_{2,n}$, $n, \nu = 0, 1, 2, \ldots N - 1$.

*C14: Szeregi Fouriera: wskazówki.*

1.(a) $f(x) = \sin^3 x$, okres periodyczności $L = 2\pi$; przyjmujemy przedział całkowania $x \in \langle -\pi, \pi)$ i korzystamy z faktu, że $f(x)$ jest funkcją nieparzystą oraz że $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = 2\pi\delta_{n,0}$ (całka funkcji okresowej po okresie, z wyjątkiem przypadku $n = 0$ gdzie mamy całkę z funkcji stałej).

(b)

(c) Korzystamy z faktu, że $f(x)$ jest parzysta.

2.(a) Okres $L = 2$, przyjmujemy przedział całkowania $x \in \langle 0, 1)$.

(b) Okres $L = 4$. Zauważmy, że $f(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x-1)$, gdzie $\tilde{f}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 4m - 1)$. Dla funkcji lub dystrybucji przesuniętej $T_a \equiv T(x-a)$ o okresie $L$ współczynniki Fouriera spełniają relację

$$\begin{aligned} c_n^{(T_a)} &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+L} T(x-a) e^{-i2\pi n(x/L)} dx = \| \; y = x - a, \; dy = dx \; \| = \\ &= e^{-i2\pi n(a/L)} \frac{1}{L}\int_{\alpha-a}^{\alpha+L-a} T(y) e^{-i2\pi n(y/L)} dy = e^{-i2\pi n(a/L)} c_n^{(T)}, \end{aligned}$$

ponieważ wartość ostatniej całki dla funkcji lub dystrybucji okresowej o okresie $L$ jest taka sama dla dowolnego przedziału o długości $L$.

(c) Korzystamy ze wzoru na złożenie delty Diraca z funkcją $f(x)$ (wzór (7.69) w skrypcie), $f(x) = \delta(\sin x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\cos(m\pi)|}\delta(x - m\pi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\pi)$. Okres $L = \pi$, wybieramy przedział całkowania $x \in \langle -\pi/2, \pi/2)$.

3. Dla skończonego szeregu Fouriera $A_n$, $n = 0, 1, 2 \ldots N-1$ o długości $N$ współczynnik Fouriera definiujemy jako $A_\nu = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{-2\pi i \nu n/N}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots N-1$ (wzór (9.24) w skrypcie). Stąd $A_n = \sum_{\nu=0}^{N-1} A_\nu e^{2\pi i n\nu/N}$ (wzór (9.25) w skrypcie).

*C14: Szeregi Fouriera: odpowiedzi.*

1.(a) $= \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$,

(b) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l+1}e^{i(2l+1)\pi x} =$
$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\sin[(2l+1)\pi x]$,

(c) $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)$.

2.(a) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(n\pi x)$,

(b) $f(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[(-i)^n - (-1)^n]e^{in\pi x/2} =$
$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\cos\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}x\right] + \frac{(-1)^m}{2}\sin\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}x\right] - \cos[(2m+1)\pi x]\right\}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(2nx)$.

3. $A_n = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left[e^{2\pi i(n-1)\nu/N} + e^{2\pi i(n-2)\nu/N}\right]$.

*C14: Szeregi Fouriera: rozwiązania.*

1.(a) Współczynniki Fouriera

$$
\begin{aligned}
c_n^{(f)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\sin^3 x dx = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x \sin nx dx \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} dx \\
&= -\frac{i}{32\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[e^{i(n+3)x} - 3e^{i(n+1)x} + 3e^{i(n-1)x} - e^{i(n-3)x} \\
&\quad - e^{-i(n-3)x} + 3e^{-i(n-1)x} - 3e^{-i(n+1)x} + e^{-i(n+3)x}\Big] dx \\
&= -\frac{i}{16}[\delta_{n,-3} - 3\delta_{n,-1} + 3\delta_{n,1} - \delta_{n,3} - \delta_{n,3} + 3\delta_{n,1} - 3\delta_{n,-1} + \delta_{n,-3}] \\
&= -\frac{i}{8}[\delta_{n,-3} - 3\delta_{n,-1} + 3\delta_{n,1} - \delta_{n,3}].
\end{aligned}
$$

Szereg Fouriera

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(f)} e^{2\pi i n(x/2\pi)} = -\frac{i}{8}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta_{n,-3} - 3\delta_{n,-1} + 3\delta_{n,1} - \delta_{n,3}]e^{inx} \\
&= -\frac{i}{8}(e^{-i3x} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} - e^{i3x}) \\
&= -2i\frac{i}{8}\left(3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} - \frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x).
\end{aligned}
$$

(b) Współczynniki Fouriera

$$
\begin{aligned}
n \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad c_n^{(f)} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-i\pi n x}dx = \frac{i}{2n\pi}\, e^{-in\pi x}\Big|_0^1 = \frac{i}{2n\pi}(e^{-in\pi} - 1) = \frac{i}{2n\pi}[(-1)^n - 1], \\
n = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_0^{(f)} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Widać, że oprócz $c_0$ współczynniki z $n$ parzystym są równe zeru, więc wykładniczy szereg Fouriera

$$
f(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l+1}e^{i(2l+1)\pi x}
$$

Trygonometryczny szereg Fouriera uzyskujemy albo bezpośrednio obliczając współczynniki Fouriera ze wzorów (9.23a-9.23c) w skrypcie, albo przekształcając powyższy wynik,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\left[\sum_{l=-1}^{-\infty}\frac{1}{2l+1}e^{i(2l+1)\pi x} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}e^{i(2l+1)\pi x}\right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\left[-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}e^{-i(2l+1)\pi x} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}e^{i(2l+1)\pi x}\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\sin[(2l+1)\pi x].
\end{aligned}
$$

(c) Współczynniki Fouriera

$$
\begin{aligned}
n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c_n^{(f)} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \cos(n\pi x) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + \left(\frac{x^2}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right)\sin(n\pi x)\right]\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) = \frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n, \\
n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0^{(f)} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Szereg Fouriera w postaci wykładniczej i trygonometrycznej,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{in\pi x} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\frac{e^{in\pi x} + e^{-in\pi x}}{2} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x).
\end{aligned}
$$

2.(a) Współczynniki Fouriera

$$
c_n^{(f)} = \frac{1}{2}\int_0^2 \delta(x-1)e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}e^{-in\pi} = \frac{1}{2}(-1)^n.
$$

Szereg Fouriera wykładniczy i trygonometryczny

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{in\pi x} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{in\pi x} + e^{-in\pi x}}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(n\pi x).
\end{aligned}
$$

(b) Korzystając ze wskazówki, dla dystrybucji $\tilde{f}(x)$, wybierając przedział całkowania $x \in \langle 0, 4)$ mamy

$$
c_n^{(\tilde{f})} = \frac{1}{4}\int_0^4 \delta(x-1)e^{-in\pi x/2}dx = \frac{1}{4}e^{-in\pi/2} = \frac{(-i)^n}{4},
$$

a dla dystrybucji $\tilde{f}_1 = \tilde{f}(x-1)$

$$
c_n^{(\tilde{f}_1)} = e^{-in\pi/2}c_n^{(\tilde{f})} = \frac{1}{4}e^{-in\pi} = \frac{(-1)^n}{4}.
$$

Wykładniczy szereg Fouriera

$$
f(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[(-i)^n - (-1)^n]e^{in\pi x/2}
$$

Ponieważ $(-1)^{-n} = (-1)^n$, $(-i)^n = (-1)^n i^n$, $(-i)^{-n} = (-1)^{-n}\frac{1}{i^n}\frac{(-i)^n}{(-i)^n}$, trygonometryczny szereg Fouriera przyjmuje dość skomplikowaną postać $= (-1)^{-n}(-1)^n i^n = i^n$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[(-1)^n i^n - (-1)^n]e^{in\pi x/2} + [i^n - (-1)^n]e^{-in\pi x/2}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} i^n[(-1)^n e^{in\pi x/2} + e^{-in\pi x/2}] - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{in\pi x/2} + e^{-in\pi x/2}) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\infty} i^{2l}[(-1)^{2l} e^{i2l\pi x/2} + e^{-i2l\pi x/2}] \\
&+ \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{\infty} i^{2l+1}[(-1)^{2l+1} e^{i(2l+1)\pi x/2} + e^{-i(2l+1)\pi x/2}] \\
&- \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{2l}(e^{i2l\pi x/2} + e^{-i2l\pi x/2}) \\
&- \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{2l+1}[e^{i(2l+1)\pi x/2} + e^{-i(2l+1)\pi x/2}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\cos(l\pi x) + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \sin\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}x\right] \\
&- \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\cos(l\pi x) + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\cos\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}x\right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\cos\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}x\right] + \frac{(-1)^m}{2}\sin\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}x\right] - \cos[(2m+1)\pi x]\right\}.
\end{aligned}$$

(c) Współczynniki Fouriera

$$c_n^{(f)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\delta(x)e^{-2inx}dx = \frac{1}{\pi}.$$

Szereg Fouriera wykładniczy i trygonometryczny

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2inx} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2inx} + e^{-2inx}}{2} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2nx).
\end{aligned}$$

3.

$$A_\nu = N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}(\delta_{1,n} + \delta_{2,n})e^{-2\pi i\nu n/N} = N^{-1}(e^{-2\pi i\nu/N} + e^{-4\pi i\nu/N}),$$

stąd i ze wskazówki wynik.

## Notacje i oznaczenia

### Zbiory i liczby

- Zbiór liczb naturalnych oznaczamy przez $\mathbb{N}$.

Przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$.

- Zbiór liczb całkowitych oznaczamy przez $\mathbb{Z}$.
- Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy przez $\mathbb{R}$.
- Zbiór dodatnich liczb rzeczywistych oznaczamy przez $\mathbb{R}_+$.

Analogicznie dla ujemnych $\mathbb{R}_-$.

- Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$, przy czym

$$z \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; z = (x, y) = x + iy, \text{ gdzie } x, y \in \mathbb{R}.$$

Mówimy, że $x$ jest częścią rzeczywistą $z$, a $y$ jej częścią zespoloną i zapisujemy $x = \mathfrak{Re}(z)$ oraz $y = \mathfrak{Im}(z)$.

- Wzór Eulera umożliwia przejście od trygonometrycznej do wykładniczej reprezentacji liczb zespolonych

$$e^{x+iy} = e^x \left[\cos(y) + i \sin(y)\right].$$

Uważany za najpiękniejszy wzór Matematyki: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$.

### Funkcje specjalne

- Funkcja gamma Eulera $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$.
- Funkcja beta Eulera $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$.

### Transformaty

- Transformata Laplace'a $\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$.
- Odwrotna transformata Laplace'a ???

Wysokośc tabeli do poprawy

| **Oryginał** | **Transformata Laplace'a** |
|---|---|
| $h(t) = f(t-a)$ | $\tilde{h}(s) = e^{-as}\tilde{f}(s)$ |
| $h(t) = f'(t)$ | $\tilde{h}(s) = s\tilde{f}(s) - f(0)$ |
| $h(t) = f''(t)$ | $\tilde{h}(s) = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$ |
| | |

## *Wprowadzenie do środowiska Wolfram Mathematica*

Poniżej zamieszczamy krótkie wprowadzenie do środowiska Wolfram Mathematica, które często może być pomocnym narzędziem podczas zmagań z zadaniami z metod matematycznych fizyki.

Zwracamy uwagę, że każda pojawiająca się w tekście nazwa mathematicznej funkcji (np. `D[]`) jest hiperłączem, po kliknięciu w które można przeczytać dokumentację tej funkcji na stronie reference.wolfram.com/language/

Podstawową jednostką składni w środowisku Mathematica jest komórka. Komórki mogą przyjmować kilka typów, ale dwa najważniejsze z nich to `In[]`, czyli wprowadzany przez użtkownika skrypt oraz `Out[]`, czyli wynik działania `In[]`. Aby wykonać komórkę, w której aktualnie znajduje się kursor należy wcisnąć `[Shift]+[Enter]` lub prawy `[Enter]`.

Komórki wyróżnione są wewnątrz notatnika ramką po prawej stronie.

Nazwy wbudowanych funkcji w języku Wolfram zawsze zaczynają się wielką literą według wzoru

```
NazwaFunkcji[arg1, arg2, ...]
```

gdzie argumenty funkcji przekazywane są w kwadratowych nawiasach `[]`. Najważniejszym sposobem poznawania funkcjonalności Mathematiki jest jej bogata pomoc. Jest to także podstawowe narzędzie pracy w tym środowisku. Pomoc wywołuje się klawiszem `[F1]` wewnątrz aktywnego notatnika, lub, nawet bez aktywnej aplikacji, można sprawdzić jej internetową wersję.

Zauważmy, że te nazwy dość dokładnie precyzują co dana funkcja robi, np. `Series[]` rozwija w szereg, a `Solve[]` rozwiązuje równania. Podstawowa znajomość języka angielskiego pozwala zatem na dość dokładne przewidywanie nazwy funkcji, której funkcjonalność chcielibyśmy uzyskać.

Zauważmy, że te nazwy dość dokładnie precyzują co dana funkcja robi, np. `Series[]` rozwija w szereg, a `Solve[]` rozwiązuje równania. Podstawowa znajomość języka angielskiego pozwala zatem na dość dokładne przewidywanie nazwy funkcji, której funkcjonalność chcielibyśmy uzyskać.

Dostępną, przypomnijmy, pod adresem reference.wolfram.com/language/

Jako ćwiczenie wprowadzające do środowiska Wolfram Mathematica proponujemy sprawdzić w dokumentacji do czego mogą służyć następujące funkcje

Zwracamy uwagę na bogactwo przykładów dostępnych w plikach pomocy.

- `Plot[]`
- `Integrate[]`,
- `Solve[]`,
- `Manipulate[]`,
- `Table[]`,
- `Graphics[]`,
- `D[]`,
- `ListPlot[]`,
- `Simplify[]`.

## *Przybornik mathematiczny*

Poniżej prezentujemy najważniejsze komendy środowiska Wolfram Mathematica, które mogą być pomoce przy realizacji zadań. Każdą z funkcji krótko komentujemy i ilustrujemy przykładem

- fun

## *Literatura*

[1] Alfred Zagórski. *Metody matematyczne fizyki*. Oficyna Wydawnicza PW, 2014.