

Mechanika kwantowa. Zestaw 3. Wstęp do zagadnień rozpraszania.

Przybliżenie Borna

Z3.1. W przybliżeniu Borna obliczyć różniczkowy i całkowity przekrój czynny na rozpraszanie na następujących potencjałach sferycznie symetrycznych:

- (a) $V(r) = V_0 > 0$ dla $r \leq a$, $V(r) = 0$ dla $r > a$,
- (b) $V(r) = (\alpha/r)e^{-r/a}$, $\alpha > 0$ (potencjał Yukawy); zbadać przypadek graniczny $a \rightarrow \infty$ (potencjał Coulombowski),
- (c) $V(r) = \alpha/r^2$,
- (d) $V(r) = (\alpha/r^\beta)e^{-r/a}$, $\beta \in (1, 2)$; zbadać przypadek graniczny $a \rightarrow \infty$,
- (e) $V(r) = e^{-r/a}$,
- (f) $V(r) = e^{-(r/a)^2}$.

Z3.2 (P). Wiązka naładowanych cząstek punktowych ulega rozproszeniu na ograniczonym w przestrzeni rozkładzie ładunków o gęstości objętościowej $\rho(\vec{r})$. Znaleźć, w przybliżeniu Borna, ogólne wyrażenie na amplitudę rozpraszania w zależności od $\rho(\vec{r})$. Posługując się tym wynikiem, obliczyć różniczkowy i całkowity przekrój czynny na rozpraszanie cząstek na atomie wodoru w stanie podstawowym, traktując dla uproszczenia jądro jako ładunek punktowy. (Wsk. Potencjał rozpraszający spełnia równanie Poissona $\nabla^2 V(\vec{r}) = 4\pi e \rho(\vec{r})$. Potencjał ten dla $r \rightarrow \infty$ zachowuje się jak potencjał ładunku punkowego $V(r \rightarrow \infty) \propto r^{-1}$, więc aby zapewnić zbieżność obliczanych całek, należy przemnożyć go przez czynnik wykładniczy $e^{-r/a}$ i na końcu dokonać przejścia $a \rightarrow \infty$. Całkę $\int V(\vec{r})e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r}$ można wówczas przekształcić do całki zawierającej $\rho(\vec{r})$, biorąc pod uwagę, że $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -q^2 \nabla^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$ i korzystając z tożsamości Greena).

Metoda przesunięć fazowych

Z3.3 Wykazać, że w przypadku rozpraszania powolnych cząstek na sferycznie symetrycznych potencjałach krótkozasięgowych (może być to nawet potencjał Yukawy z zad. 3.1(b) o efektywnym zasięgu a) dla przesunięcia fazowego fali rozproszonej o indeksie l zachodzi proporcjonalność $\delta_l \propto k^{2l+1}$ (co dla $k \rightarrow 0$ oznacza, że największy wkład do amplitudy rozpraszania wnoszą fale z $l = 0$).

Z3.4. Twierdzenie optyczne. Wykazać związek pomiędzy amplitudą rozpraszania w przód $f(0) = f(\theta = 0)$ a całkowitym przekrojem czynnym,

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0).$$

Z3.5. Wyznaczyć różniczkowy i całkowity i przekrój czynny na rozpraszanie cząstek na idealnie sprężystej sferze o promieniu a (potencjał $V(r) = \infty$ dla $r \leq a$, $V(r) = 0$ dla $r > a$). Rozpatrzyć w szczególności przypadek cząstek powolnych, dla których $ka \ll 1$ ($\lambda \gg a$). Wykazać bezpośrednim rachunkiem, że największe natężenie ma fala rozproszona o wskaźniku $l = 0$ (rozpraszanie izotropowe).

Z3.6 (P). Wyznaczyć różniczkowy i całkowity i przekrój czynny na rozpraszanie cząstek na "garbie" potencjału o promieniu a (potencjał $V(r) = V_0 > 0$ dla $r \leq a$, $V(r) = 0$ dla $r > a$), w przypadku gdy energia cząstki rozpraszanej jest (a) $E < V_0$, (b) $E > V_0$. Rozpatrzyć w szczególności przypadek cząstek powolnych, dla których $ka \ll 1$ ($\lambda \gg a$). W obliczeniach można ograniczyć się do fali parcjalej z $l = 0$.

Z3.7 (P). Wyznaczyć różniczkowy i całkowity i przekrój czynny na rozpraszanie cząstek na sferycznie symetrycznej studni potencjału o promieniu a (potencjał $V(r) = -V_0 < 0$ dla $r \leq a$, $V(r) = 0$ dla $r > a$). Rozpatrzyć w szczególności przypadek cząstek powolnych, dla których $ka \ll 1$ ($\lambda \gg a$). W obliczeniach można ograniczyć się do fali parcjalej z $l = 0$. (Wsk. Zadanie rozwiązuje się podobnie jak zad. 3.6(b).)

Z3.8 (P). Metodą przesunięć fazowych wyznaczyć różniczkowy i całkowity i przekrój czynny na rozpraszanie cząstek na potencjale odpychającym $V(r) = \alpha/r^2$, $\alpha > 0$.