

Mechanika kwantowa. Zestaw 2. Rachunek zaburzeń z czasem.

Z2.1. Wyznaczyć, w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, ogólne wzory na prawdopodobieństwo przejścia układu ze stanu początkowego m w chwili $t = 0$ do stanu k w chwili $t > 0$ (w widmie dyskretnym) pod wpływem potencjału, włączonego w chwili $t = 0$ i wyłączzonego w chwili $t = \Theta$,

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \quad t \geq \Theta, \\ V(x), & 0 < t < \Theta. \end{cases}$$

Z2.2. Emisja i absorpcja wymuszona. Wyznaczyć, w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, ogólne wzory na prawdopodobieństwo przejścia układu ze stanu początkowego m w chwili $t = 0$ do stanu k w chwili $t > 0$ (w widmie dyskretnym) pod wpływem potencjału

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ V_0(x) \cos \omega t, & t > 0. \end{cases}$$

Z2.3. Przejście poprzez stany pośrednie. Załóżmy, że pewien układ o widmie dyskretnym w chwili $t = 0$ znajduje się w stanie m . Włączono stały potencjał zaburzający $V = \text{const}$ dla $t > 0$. Załóżmy, że dla danych stanów k, m zachodzi $V_{k,m} = 0$, tj. bezpośrednie przejście układu ze stanu m do k pod wpływem tego zaburzenia jest niemożliwe. Jednak istnieją stany l (stany pośrednie), takie że $V_{l,m} \neq 0, V_{k,l} \neq 0$, czyli możliwe są przejścia $m \rightarrow l \rightarrow k$. Znaleźć, w drugim rzędzie rachunku zaburzeń, amplitudę prawdopodobieństwa przejścia $c_{k,m}^{(2)}$ ze stanu m do stanu k poprzez wszystkie możliwe stany pośrednie.

Z2.4. Jednowymiarowy oscylator harmoniczny o masie μ i częstotliwości ω umieszczono w jednorodnym, zmiennym w czasie polu elektrycznym $\mathcal{E}(t)$, traktowanym jako zaburzenie. Przed włączeniem zaburzenia, tj. dla $t \rightarrow -\infty$, oscylator znajdował się w stanie własnym m . Znaleźć, w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, prawdopodobieństwo, że dla $t \rightarrow \infty$ oscylator pod wpływem tego zaburzenia znajdzie się w stanie własnym k , jeżeli dla $t < 0$ pole narasta od zera do wartości maksymalnej, a dla $t > 0$ maleje z powrotem do zera zgodnie z prawem

$$(a) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{f_0}{\sqrt{\pi}\tau} \exp(-t^2/\tau^2),$$

$$(b) \quad \mathcal{E}(t) = f_0 [(t/\tau)^2 + 1]^{-1}.$$

Z2.5. Jednowymiarowy oscylator harmoniczny o masie μ i częstotliwości ω umieszczono w jednorodnym, zmiennym w czasie polu elektrycznym $\mathcal{E}(t)$, traktowanym jako zaburzenie. Przed włączeniem zaburzenia, tj. dla $t \rightarrow -\infty$, oscylator znajdował się w stanie własnym m . Znaleźć, w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, prawdopodobieństwo, że dla $t \rightarrow \infty$ oscylator pod wpływem tego zaburzenia znajdzie się w stanie własnym k , jeżeli pole narasta od zera przy $t \rightarrow -\infty$ do wartości skończonej zgodnie z prawem $\mathcal{E}(t) = \frac{f_0}{\pi} [1 + \arctg(t/\tau)]$. Rozważyć przypadek powolnego ($\tau \gg 1$) i szybkiego ($\tau \rightarrow 0$) wzrostu pola.

Z2.6 (P). Jednowymiarowy oscylator harmoniczny znajduje się w stanie podstawowym. W chwili $t = 0$ włączono jednorodne pole elektryczne $\mathcal{E} = \text{const}$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że wskutek takiego nagłego włączenia pola oscylator znajdzie się w n -tym stanie wzbudzonym

(a) w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń (por. zad. Z2.5),

(b) wychodząc z pierwszych zasad (Wsk. Wykazać, że przyłożenie stałego, jednorodnego pola elektrycznego powoduje przesunięcie punktu równowagi oscylatora, przy czym jego stany własne pozostają niezmienione, a ich energie ulegają przesunięciu o stałą wartość. Ponieważ pole włączono nagle, tuż po włączeniu pola, w chwili $t = 0^+$, oscylator będzie znajdował się w stanie podstawowym oscylatora bez pola; żeby uzyskać prawdopodobieństwo przejścia do stanu k , należy rozłożyć ten stan początkowy w bazie funkcji własnych oscylatora z polem).

Z2.7 (P). Atom wodoru wskutek nagłego zderzenia z innym atomem uzyskuje prędkość $\vec{v}$. Wychodząc z pierwszych zasad, znaleźć prawdopodobieństwo, że wskutek tego zderzenia elektron przejdzie ze stanu podstawowego ψ_{100} do jednego ze stanów wzbudzonych. (Wsk. Zadanie łatwiej jest rozwiązać w układzie, związanym z poruszającym się po zderzeniu jądrem atomowym. W tym układzie, tuż po zderzeniu, stan elektronu będzie stanem podstawowym atomu spoczywającego w układzie laboratoryjnym, czyli poruszającego się z prędkością $-\vec{v}$ względem układu związanego z atomem po zderzeniu. W tym ostatnim układzie można dokonać rozdzielania zmiennych na opisujące ruch środka masy "chmury" elektronowej i ruch elektronu względem środka masy (w praktyce względem jądra). Funkcja falowa elektronu tuż po zderzeniu będzie miała zatem postać iloczynową $\psi(t = 0^+) = e^{-i\vec{q}\vec{r}} \psi_{100}(\vec{r})$, gdzie $\vec{q} = m\vec{v}/\hbar$ jest wektorem falowym środka masy "chmury" elektronowej, człon $e^{-i\vec{q}\vec{r}}$ opisuje ruch środka masy "chmury" elektronowej, a człon $\psi_{100}(\vec{r})$ ruch elektronu względem środka masy (jądra). Dalej należy postępować jak w zad. Z2.6(b)).

Z2.8 (P). Przybliżenie adiabatyczne. Punkt zawieszenia oscylatora harmonicznego o masie μ i częstotliwości ω w przedziale czasu $0 < t < \Theta$ poruszał się w prawo z prędkością v_0 ($v_0 \rightarrow 0$). W chwili początkowej oscylator znajdował się w stanie podstawowym. Posługując się przybliżeniem adiabatycznym, znaleźć w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo, że dla $t > \Theta$ oscylator będzie znajdował się w n -tym stanie wzbudzonym.

Z2.9 (P). Przejścia w widmie ciągłym. Na atom wodoru, znajdujący się w chwili $t = 0$ w stanie podstawowym, działa dla $t > 0$ jednorodne pole elektryczne $\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \sin \omega t$. Obliczyć prawdopodobieństwo jonizacji atomu na jednostkę czasu. Przyjąć, że w dużych odległościach od jądra funkcję falową elektronu swobodnego można przybliżyć przez falę płaską $\psi(\vec{r}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\vec{k}\vec{r}}$.