

Wykład IX

- Przekształcenia punktowe,
- Przekształcenia kanoniczne,
- Własności przekształceń kanonicznych

Transformacje (przekształcenia) punktowe

Rozważamy dowolną transformację współrzędnych uogólnionych, zgodnych z więzami

$$q_l = q_l(Q, t), \quad l = 1, 2, \dots, f, \quad \text{gdzie } Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_f),$$

$$|\partial q_k / \partial Q_l| \neq 0 \Rightarrow \text{istnieje transf. odwrotna } Q_l = Q_l(q, t)$$

Równania Lagrange'a są niezmiennicze względem zamiany zmiennych uogólnionych

W starych zmiennych (q, p, t)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0,$$

gdzie $L = L(q, \dot{q}, t)$

W nowych zmiennych (Q, P, t)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_l} = 0$$

gdzie $L = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, t), t),$

$$\dot{q}_l = \sum_{k=1}^f \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_l}{\partial t}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Transformacja współrzędnych uogólnionych określa sposób, w jaki transformują się pędy uogólnione

$$P_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f \quad \left(\Rightarrow p_l = \sum_{k=1}^f P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} \right)$$

Rozpatrujemy równania Hamiltona

Rozważamy dowolną
transformację współrzędnych

Jeżeli istnieje niezerowy
wyznacznik

to istnieje również
transformacja odwrotna

$$\begin{matrix} q_l = q_l(Q, P, t) \\ p_l = p_l(Q, P, t) \end{matrix} \quad \frac{D(q_1, \dots, p_f)}{D(Q_1, \dots, P_f)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} & \frac{\partial q_k}{\partial P_l} \\ \frac{\partial p_k}{\partial Q_l} & \frac{\partial p_k}{\partial P_l} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} Q_l = Q_l(q, p, t) \\ P_l = P_l(q, p, t) \end{matrix}, l = 1, 2, \dots, f$$

Żądamy, żeby w starych (q, p, t) i nowych (Q, P, t) zmiennych równania Hamiltona miały taką samą postać

$$\begin{matrix} \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \\ \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \end{matrix}, \quad H = H(q, p, t) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dot{Q}_l = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_l} \\ \dot{P}_l = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_l} \end{matrix}, \quad \bar{H} = \bar{H}(Q, P, t)$$

Przy tym $H(q, p, t)$ oraz $\bar{H}(Q, P, t)$ połączone są nieznanym jeszcze przekształceniem, którego postać trzeba wyznaczyć

$$H = H(q, p, t) \rightarrow \bar{H} = \bar{H}(Q, P, t)$$

Zasada wariacyjna, prowadząca do równań Hamiltona, jest spełniona w starych i nowych zmiennych

$$\left. \begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - H(q, p, t) \right] dt = 0, \quad \delta q_l(t_0) = \delta q_l(t_1) = 0, \quad \delta p_l(t_0) = \delta p_l(t_1) = 0, \\ \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f P_l \dot{Q}_l - \bar{H}(Q, P, t) \right] dt = 0, \quad \delta Q_l(t_0) = \delta Q_l(t_1) = 0, \quad \delta P_l(t_0) = \delta P_l(t_1) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)) \right] dt = 0$$

Powyższy związek jest spełniony tożsamościowo wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego układu funkcji $p_l(t)$, $q_l(t)$, $P_l(t)$, $Q_l(t)$, zachodzi tożsamość

$$\sum_{l=1}^f (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)) = \frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \Phi(Q, P, t)$$

dowolna funkcja
różniczkowalna (Q, P, t)
– **funkcja tworząca**
przekształcenia
kanonicznego

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d\Phi$$

Warunek dostateczny, by
transformacja od starych
 (q, p, t) do nowych (Q, P, t)
zmiennych zachowywała
postać równań Hamiltona,
określa również sposób
transformacji hamiltonianu

Dowód: $\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)) \right] dt =$

$$= \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\delta\Phi}{dt} dt = \delta\Phi \Big|_{t_0}^{t_1} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Q_l} \delta Q_l + \frac{\partial\Phi}{\partial P_l} \delta P_l \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

Przekształcając warunek kanoniczności (zapisując lewą stronę jako funkcję nowych zmiennych (Q, P, t))

$$\sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d\Phi \quad (*)$$

$$dq_l = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial q_l}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial q_l}{\partial P_k} dP_k \right) + \frac{\partial q_l}{\partial t} dt$$

$$d\Phi = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Q_l} dQ_l + \frac{\partial \Phi}{\partial P_l} dP_l \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt$$

otrzymujemy, że transformacja jest kanoniczna, jeśli są spełnione związki

$$\sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} - P_l = \frac{\partial \Phi}{\partial Q_l}, \quad p_k = p_k(Q, P, t), \quad q_k = q_k(Q, P, t)$$

$$\sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial P_l},$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) - \sum_{l=1}^f p_l \frac{\partial q_l}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Ta reguła określa sposób transformacji hamiltonianu. Jeżeli hamiltonian zostanie przekształcony w powyższy sposób, równania Hamiltona w nowych zmiennych (Q, P, t) będą miały taką samą postać jak w starych zmiennych (q, p, t)

Transformacje (przekształcenia) kanoniczne

Równania Hamiltona są niezmiennicze względem **przekształcenia kanonicznego** ze starych (q,p,t) do nowych (Q,P,t) zmiennych, jeżeli równocześnie hamiltonian transformujemy tak, by był spełniony warunek

$$\sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d\Phi(Q, P, t) \quad (*)$$

Warunek powyższy można zapisać przy pomocy dowolnych dwóch spośród czterech zestawów zmiennych p_l, q_l, P_l, Q_l , na przykład

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt + d \sum_{l=1}^f P_l Q_l = \\ &= \sum_{l=1}^f (p_l dq_l + Q_l dP_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d \left[\Phi(Q, P, t) + \sum_{l=1}^f P_l Q_l \right] \end{aligned}$$

Przy odpowiednich założeniach co do odwracalności transformacji wyrażenia po prawej stronie powyższych warunków można zapisać jako funkcje tych samych zmiennych, które występują po stronie lewej.

$$|\partial q_k / \partial P_l| \neq 0 \Rightarrow P_l = P_l(q, Q, t), \quad W(q, Q, t) \equiv \Phi(Q, P(q, Q, t), t),$$

$$\sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = dW(q, Q, t)$$

funkcje tworzące
przekształcenia
kanonicznego

$$|\partial q_k / \partial Q_l| \neq 0 \Rightarrow Q_l = Q_l(q, P, t), \quad S(q, P, t) \equiv \sum_{l=1}^f P_l Q_l(q, P, t) + \Phi(Q(q, P, t), P, t),$$

$$\sum_{l=1}^f (p_l dq_l + Q_l dP_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = dS(q, P, t)$$

Można pokazać, że różniczki dp_l , dq_l , dP_l , dQ_l , są dowolne, więc

$$p_l = \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial q_l}, \quad P_l = -\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial Q_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f \text{ i niech } \left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial Q_l} \right| \neq 0$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial W}{\partial t}$$

Można powyższe równania rozwiązać względem p_l , q_l , otrzymując transformację kanoniczną i hamiltonian

$$q_l = q_l(Q, P, t), \quad p_l = p_l(Q, P, t),$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial W(q(Q, P, t), Q, t)}{\partial t}$$

Względem takich transformacji równania Hamiltona są niezmiennicze, o ile hamiltonian transformujemy w podany sposób

Podobnie

$$p_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f \text{ i niech } \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial P_l} \right| \neq 0$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \Rightarrow$$

$$q_l = q_l(Q, P, t), \quad p_l = p_l(Q, P, t),$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial S(q(Q, P, t), P, t)}{\partial t}$$

Rozszerzona transformacja punktowa

Niech $|\partial q_k / \partial Q_l| \neq 0$

$$\begin{aligned} q_l &= q_l(Q, t), \\ p_l &= \sum_{k=1}^f P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f \end{aligned}$$

Taka transformacja jest kanoniczna, z funkcją tworzącą:

$$S(q, P, t) = \sum_{l=1}^f P_l Q_l(q, t)$$

Rozszerzone transformacje punktowe są transformacjami kanonicznymi, ale nie wszystkie transformacje kanoniczne można zapisać jako rozszerzone transformacje punktowe

Własności przekształceń kanonicznych

Przekształcenia kanoniczne tworzą grupę przekształceń w przestrzeni fazowej, tzn.

- Przekształcenie tożsamościowe jest przekształceniem kanonicznym
- Superpozycja dwóch przekształceń kanonicznych jest przekształceniem kanonicznym
- Transformacja odwrotna do przekształcenia kanonicznego jest przekształceniem kanonicznym

Nawiasy Poissona są niezmiennikami przekształceń kanonicznych

$$(F, G) = (F, G)'$$

$$\text{gdzie } (F, G) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right), \quad F = F(q, p, t), \quad G = G(q, p, t)$$

$$(F, G)' = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial Q_l} \frac{\partial G}{\partial P_l} - \frac{\partial F}{\partial P_l} \frac{\partial G}{\partial Q_l} \right), \quad \begin{aligned} F &= F(Q, P, t) = F(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) \\ G &= G(Q, P, t) = G(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) \end{aligned}$$

Wniosek: Warunkiem dostatecznym kanoniczności przekształcenia są związki:

$$(Q_l, Q_k) = (P_l, P_k) = 0, \quad (Q_l, P_k) = \delta_{l,k}, \quad Q_l = Q_l(q, p, t), \quad P_l = P_l(q, p, t), \quad l, k = 1, 2, \dots, f$$

Każde dwa zespoły zmiennych kanonicznych, opisujące dwa stany, które układ przyjmuje podczas swego ruchu, są powiązane przekształceniem kanonicznym (czyli ruch układu w przestrzeni fazowej można uważać za pewne przekształcenie kanoniczne)

Dowód: Wykażmy najpierw prawdziwość wzorów pomocniczych

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial p_l}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} = -\frac{\partial q_l}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_k}(\bar{H} - H)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial q_l} = -\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial p_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q_k}(\bar{H} - H)$$

Zróżniczkujemy po czasie wzory transformacyjne

$$\dot{Q}_k = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} \dot{p}_l \right) + \frac{\partial Q_k}{\partial t}, \quad \dot{P}_k = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial P_k}{\partial p_l} \dot{p}_l \right) + \frac{\partial P_k}{\partial t},$$

Z tożsamości $\bar{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) + \bar{H}(Q, P, t) - H(q, p, t) \Rightarrow$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial P_k} + \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \right) + \frac{\partial}{\partial P_k}(\bar{H} - H), \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial Q_k} \right) + \frac{\partial}{\partial Q_k}(\bar{H} - H)$$

Odejmujemy stronami i ponieważ w obu zestawach zmiennych obowiązują równ. Hamiltona, mamy:

$$0 = \dot{Q}_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = \sum_{l=1}^f \left[\left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \right) \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} + \frac{\partial H}{\partial p_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \right) + \left(\dot{p}_l + \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial Q_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial P_k}(\bar{H} - H) = \sum_{l=1}^f \left[\frac{\partial H}{\partial p_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \right) - \frac{\partial H}{\partial q_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \right) \right] + \frac{\partial Q_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial P_k}(\bar{H} - H)$$

Ponieważ rozważamy dowolną funkcję H , zaznaczone wyrazy muszą być równe zeru, więc otrzymujemy pierwszy zestaw równań. Podobnie dowodzimy drugiego.

Na podstawie wykazanych wzorów stwierdzamy, że

$$(Q_m, P_n) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l} \frac{\partial P_n}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_m}{\partial p_l} \frac{\partial P_n}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_n} + \frac{\partial Q_m}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial Q_n} \right) = \frac{\partial Q_m}{\partial Q_n} = \delta_{m,n}$$

$$(Q_m, Q_n) = (P_m, P_n) = 0$$

Stąd $(F, G) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right) =$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^f \left[\sum_{m=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial q_l} + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial q_l} \right) \sum_{n=1}^f \left(\frac{\partial G}{\partial Q_n} \frac{\partial Q_n}{\partial p_l} + \frac{\partial G}{\partial P_n} \frac{\partial P_n}{\partial p_l} \right) - \right. \\ & \left. \sum_{m=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial p_l} + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial p_l} \right) \sum_{n=1}^f \left(\frac{\partial G}{\partial Q_n} \frac{\partial Q_n}{\partial q_l} + \frac{\partial G}{\partial P_n} \frac{\partial P_n}{\partial q_l} \right) \right] = \\ & \sum_{m,n=1}^f \left[\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial G}{\partial P_n} (Q_m, P_n) + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial G}{\partial Q_n} (P_m, Q_n) + \frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial G}{\partial Q_n} (Q_m, Q_n) + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial G}{\partial P_n} (P_m, P_n) \right] = \\ & \sum_{m=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial G}{\partial P_m} - \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial G}{\partial Q_m} \right) = (F, G)' \end{aligned}$$