

Wykład II

- Zasada d'Alemberta,
- Równania Lagrange'a I rodzaju

Rozpatrujemy ruch układu n punktów z dodatkowymi ograniczeniami ruchu w postaci **więzów**

więzy dwustronne $f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$

lub więzy jednostronne $f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$

Więzy holonomiczne - jeżeli dane są przy pomocy równań lub nierówności

Więzy reonomiczne - jeśli w równaniach więzów występuje jawnie czas

Więzy skleronomiczne - jeśli w równaniach więzów czas nie występuje jawnie

Równania Newtona dla punktu swobodnego można przepisać w następującej postaci

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Leftrightarrow (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}})\delta\vec{r} = 0, \quad \delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k} - \text{dowolny wektor}$$

W przypadku ruchu punktu materialnego po powierzchni pojawiają się siły reakcji więzów, prostopadłe do powierzchni.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R,$$

$$\vec{F}_R = \lambda \text{grad} f, \quad f = f(x, y, z), \quad \lambda = \text{const}$$

Powyższe równania Newtona można przepisać w następującej postaci (**zasada d'Alemberta dla punktu materialnego poruszającego się po powierzchni**).

$$(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}})\delta\vec{r} = (X - m\ddot{x})\delta x + (Y - m\ddot{y})\delta y + (Z - m\ddot{z})\delta z = 0,$$

$$f(\vec{r}, t) = 0$$

gdzie $\delta\vec{r}$ jest dowolnym wektorem speł warunek

$$\text{grad} f \cdot \delta\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

Można również wykazać, że z zasady d'Alemberta wynikają równania Newtona. Posługujemy się w tym celu **metodą mnożników Lagrange'a**.

$$(\vec{F} + \lambda \operatorname{grad} f - m\ddot{\vec{r}}) \delta \vec{r} = 0$$

 mnożnik Lagrange'a

$$\left(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - m\ddot{x} \right) \delta x + \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - m\ddot{y} \right) \delta y + \left(Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - m\ddot{z} \right) \delta z = 0$$

Z tego równania można wyznaczyć np. δx w funkcji δy , δz . Wówczas δy , δz są dowolne, a δx - wyznaczone. Dobierzmy stałą λ tak, aby zachodziło

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - m\ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - m\ddot{y} \right) \delta y + \left(Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - m\ddot{z} \right) \delta z = 0$$

Stąd, ponieważ δy , δz są dowolne, wynika

$$Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - m\ddot{y} = 0$$

$$Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - m\ddot{z} = 0$$

Podobnie można wykazać, że **zasada d'Alemberta dla punktu materialnego poruszającego się po krzywej** ma postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{R2} = \vec{F} + \lambda_1 \text{grad}f_1 + \lambda_2 \text{grad}f_2$$

$$f_1(\vec{r}, t) = 0, \quad f_2(\vec{r}, t) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \delta \vec{r} = (X - m\ddot{x}) \delta x + (Y - m\ddot{y}) \delta y + (Z - m\ddot{z}) \delta z = 0,$$

$$f_1(\vec{r}, t) = 0, \quad f_2(\vec{r}, t) = 0$$

gdzie $\delta \vec{r}$ jest dowolnym wektorem spełniamym warunki

$$\text{grad}f_1 \cdot \delta \vec{r} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0,$$

$$\text{grad}f_2 \cdot \delta \vec{r} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z = 0$$

Przestrzeń konfiguracyjna dla układu n punktów materialnych

$$(x_i, y_i, z_i) \rightarrow (\dots, x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(X_i, Y_i, Z_i) \rightarrow (\dots, X_{3i-2}, X_{3i-1}, X_{3i}, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$m_i \rightarrow m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \rightarrow m_j \ddot{x}_j = X_j, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$$

Położenie układu n punktów w przestrzeni konfiguracyjnej dane jest wektorem $3n$ -wymiarowym

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{3n})$$

Równanie hiperpowierzchni więzów dla układu z $3n-p$ stopniami swobody

$$f_k(x, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \leq 3n$$

Przesunięcie wirtualne zgodne z więzami - dowolny wektor $3n$ -wymiarowy, spełn. warunek:

$$\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3n}) \quad \text{taki że} \quad \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Równania ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej

$$m_j \ddot{x}_j = X_j + X_{Rj}, \quad j = 1, 2, \dots, 3n$$

$$f_k(x, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Suma prac sił reakcyjnych na dowolnych przesunięciach wirtualnych zgodnych z więzami znika, gdy nie występują siły tarcia lub siły tarcia włączamy do sił zewnętrznych

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{3n} X_{Rj} \delta x_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Zasada d'Alemberta dla układu n punktów materialnych nieswobodnych

$$\sum_{j=1}^{3n} (X_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j = 0$$

$$f_k(x, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

gdzie

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Zasada Lagrange'a (zasada prac wirtualnych)

W stanie równowagi praca sił zewnętrznych na przesunięciach wirtualnych wynosi zero

$$\dot{x}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3n \Rightarrow \ddot{x}_j = 0 \Rightarrow \delta A \equiv \sum_{j=1}^{3n} X_j \delta x_j = 0$$

$$f_k(x, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

gdzie

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Równania Lagrange'a I rodzaju

Z zasady d'Alemberta

$$\sum_{j=1}^{3n} \left(X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j \right) \delta x_j = 0$$

mnożniki Lagrange'a

Niezależność funkcji
 $f_i, i=1,2,\dots,p$,
 definiujących więzy,
 gwarantuje
 istnienie niezerowego
 podwyznacznika
 rzędu p macierzy $p \times 3n$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_p}{\partial x_{3n}} \end{bmatrix}$$

Wówczas p spośród $3n$
 składowych δx_j można
 wyznaczyć z równań

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, p$$

Np. jeśli

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix} \neq 0$$

to składowe

$$\delta x_j, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

można wyrazić przez

$$\delta x_j, \quad j = p+1, p+2, \dots, 3n$$

Uważamy $\delta x_j, j = 1, 2, \dots, p$ za znane i dobieramy $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, p$

tak, aby zachodziło

$$X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Wówczas z zasady d'Alemberta wynika

$$\sum_{j=p+1}^{3n} \left(X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - m_j \ddot{x}_j \right) \delta x_j = 0$$

$\delta x_j, j = p+1, p+2, \dots, 3n$ są dowolne

w szczególności można je dobrać jako $\delta x_j = \delta_{ij}, j = p+1, p+2, \dots, 3n$

Stąd dla każdego j wynika

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 3n$$

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

**Równania Lagrange'a I rodzaju
dla układu n punktów materialnych**