

Wykład X

- Równania Hamiltona-Jacobiego.

Równanie Hamiltona-Jacobiego stanowi pewną metodę całkowania równań Hamiltona, poprzez sprowadzenie układu $2f$ równań różniczkowych zwyczajnych do równania cząstkowego

Niech transformacja kanoniczna

prowadzi do zmiennych, z których żadna nie występuje w funkcji Hamiltona; niech np. hamiltonian w nowych zmiennych będzie tożsamościowo równy zero

$$\begin{aligned} q_l &= q_l(Q, P, t) \\ p_l &= p_l(Q, P, t) \end{aligned} \quad l = 1, 2, \dots, f \quad H(Q, P, t) \equiv 0$$

Równania Hamiltona w nowych zmiennych dają wówczas od razu ruch fazowy układu

$$\begin{aligned} \dot{Q}_l &= \frac{\partial H}{\partial P_l} = 0 \\ \dot{P}_l &= -\frac{\partial H}{\partial Q_l} = 0 \end{aligned} \quad l = 1, 2, \dots, f \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} Q_l &= \text{const} = \alpha_l \\ P_l &= \text{const} = \beta_l \end{aligned} \quad \leftarrow \text{stałe całkowania}$$

Wstawiając powyższe rozwiązania do wzorów definiujących transformację kanoniczną, otrzymujemy ruch fazowy układu w zmiennych q, p w zależności od $2f$ stałych dowolnych $\alpha_l, \beta_l, l = 1, 2, \dots, f$

$$\begin{aligned} q_l &= q_l(\alpha, \beta, t) \\ p_l &= p_l(\alpha, \beta, t) \end{aligned} \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Stałe dowolne wyznaczamy z warunków początkowych

$$q_l(\alpha, \beta, t_0) = q_{l0}, \quad p_l(\alpha, \beta, t_0) = p_{l0}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Problem całkowania równań Hamiltona sprowadza się więc do znalezienia transformacji kanonicznej, prowadzącej do zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona.

Niech transformacja kanoniczna dana będzie wzorem

$$p_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f \quad \text{gdzie} \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial P_l} \right| \neq 0$$

wówczas

$$Q_l = \alpha_l, P_l = \beta_l \Rightarrow p_l = \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial q_l}, \quad \alpha_l = \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial \beta_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Rozwiązując powyższe równania względem q, p dostajemy ruch fazowy układu

$$\begin{aligned} q_l &= q_l(\alpha, \beta, t) \\ p_l &= p_l(\alpha, \beta, t) \end{aligned} \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Zauważmy że funkcja Hamiltona transformuje się według wzoru

$$H(q, p, t) + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} = 0$$

Wstawiając w miejsce pędów uogólnionych ich definicje przy pomocy funkcji tworzącej transformacji kanonicznej, otrzymujemy

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{Równanie Hamiltona - Jacobiego}$$

Rozwiązanie, zależne od stałych dowolnych, w liczbie równej liczbie zmiennych niezależnych, nazywa się **całką zupełną równania Hamiltona - Jacobiego**.

Zmiennymi niezależnymi są $q_1, q_2, \dots, q_f, t$, więc będzie $f+1$ stałych dowolnych.

Równanie Hamiltona-Jacobiego zawiera tylko pochodne funkcji S , więc funkcję S można wyznaczyć tylko z dokładnością do stałej addytywnej. Stąd wynika, że jedna ze stałych dowolnych będzie stałą addytywną.

Całka zupełna równania Hamiltona - Jacobiego ma postać

$$S = \tilde{S}(q_1, q_2, \dots, q_f, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f, t) + C,$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f, C$ - stałe dowolne

$$\text{Z założenia} \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial P_l} \right| \neq 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_k \partial \beta_l} \right| \neq 0$$

Pokazaliśmy, że funkcja tworząca transformacji kanonicznej, prowadzącej do zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona, spełnia równanie Hamiltona-Jacobiego.

Można udowodnić (twierdzenie Hamiltona - Jacobiego) że całka zupełna równania Hamiltona - Jacobiego jest funkcją tworzącą odpowiedniego przekształcenia kanonicznego.

Twierdzenie Jacobiego**Związki**

$$p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l}, \quad \alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \beta_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f \quad (*) \quad \text{w których}$$

$$S = \tilde{S}(q_1, q_2, \dots, q_f, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f, t) + C$$

jest całką zupełną równania Hamiltona-Jacobiego, zaś $\alpha_l, l = 1, 2, \dots, f$ są stałymi dowolnymi, wyznaczanymi z warunków początkowych

$$q_l(\alpha, \beta, t_0) = q_{l0}, \quad p_l(\alpha, \beta, t_0) = p_{l0}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

przedstawiają w formie uwikłanej rozwiązanie równań kanonicznych Hamiltona.

W oparciu o twierdzenie Jacobiego rozwiązywanie problemów mechanicznych sprowadza się do znajdowania całki zupełnej równania Hamiltona - Jacobiego.

Wstawiając ją do (*) i rozwiązując ten układ względem q, p otrzymujemy ruch fazowy układu punktów materialnych w zależności od $2f$ stałych dowolnych, które wyznaczamy z warunków początkowych.

Dla wyznaczenia ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej wystarcza tylko drugi zestaw równań (*)

Dowód polega na wykazaniu, że funkcje

$$q_l = q_l(\alpha, \beta, t), \quad p_l = p_l(\alpha, \beta, t), \quad l = 1, 2, \dots, f$$

powstające z rozwikłania względem q, p związków (*) spełniają przy dowolnych α, β równania Hamiltona

Wstawiamy do równania Hamiltona-Jacobiego jego całkę zupełną i różniczkujemy stronami po q_l , β_l , $l = 1, 2, \dots, f$

$$H\left(q, \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_l} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_l \partial q_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_l \partial t} = 0 \\ \sum_{k=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_l \partial q_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_l \partial t} = 0 \end{cases}$$

$$p_l(\alpha, \beta, t) = \frac{\partial S(q(\alpha, \beta, t), \beta, t)}{\partial q_l} \Rightarrow \frac{dp_l}{dt} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_l} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_l}$$

$$\alpha_l = \frac{\partial S(q(\alpha, \beta, t), \beta, t)}{\partial \beta_l} \Rightarrow \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \beta_l} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \beta_l} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dp_l}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_l} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_l} \left(\frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = 0 \\ \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \beta_l} \left(\frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dp_l}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Separacja zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona

Separacja czasu

Niech $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const} = E$ np. gdy potencjał nie zależy od czasu

Równanie Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Podstawiamy $S = S_0(q_1, q_2, \dots, q_f) - Et \Rightarrow H\left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_f}\right) = E \quad (*)$

Rozwiązanie (*) zależy od f stałych dowolnych $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_f, C$ (gdzie C jest stałą addytywną)

$$S_0 = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \dots, q_f, E, \beta_2, \dots, \beta_f) + C \Rightarrow S = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \dots, q_f, E, \beta_2, \dots, \beta_f) - Et + C,$$

Wprowadzając stałą β_1 i podstawiając za E pewną określoną funkcję $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f$ otrzymujemy

$$E = E(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f) \Rightarrow S = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \dots, q_f, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f) - E(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f)t + C$$

Wprowadzając oznaczenia

otrzymujemy ruch układu z równań

$$S_0 = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \dots, q_f, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f) + C \quad \left| \quad \begin{array}{l} p_l = \frac{\partial S_0}{\partial q_l} \\ \omega_l \equiv \frac{\partial E(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f)}{\partial \beta_l} \end{array} \right. \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \omega_l t + \alpha_l = \frac{\partial S_0}{\partial \beta_l} \\ l = 1, 2, \dots, f \end{array}$$

Ostatnie f równości dają ruch w przestrzeni konfiguracyjnej

Separacja zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona
 Separacja współrzędnych cyklicznych

Niech $\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0$ W tym przypadku dokonujemy podstawienia

$$S = S_1(q_1, q_2, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q_f) + \beta_r q_r \Rightarrow$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q_f, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_{r-1}}, \beta_r, \frac{\partial S_0}{\partial q_{r+1}}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0$$

Całka zupełna równania Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$S = \tilde{S}_1(q_1, q_2, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q_f, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \dots, \beta_f, t) + \beta_r q_r + C$$

Ruch układu otrzymujemy więc z równań

$$\begin{cases} p_l = \frac{\partial S_1}{\partial q_l} \quad (l \neq r) & \alpha_l = \frac{\partial S_1}{\partial \beta_l} \quad (l \neq r) \\ p_r = \beta_r & \alpha_r = \frac{\partial S_1}{\partial \beta_r} + q_r \end{cases}$$

Separacja zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona

Zmienne separowalne

W równaniu Hamiltona-Jacobiego zmienne są separowalne, jeżeli całka zupełna ma postać

$$S_0 = \sum_{l=1}^f S_l(q_l) \quad (*)$$

Np. w równaniu Hamiltona-Jacobiego postaci

$$\sum_{l=1}^f H_l\left(q_l, \frac{\partial S_0}{\partial q_l}\right) = E$$

zmienne są separowalne, o czym można się przekonać, dokonując podstawienia (*)

$$\sum_{l=1}^f H_l\left(q_l, \frac{\partial S_l}{\partial q_l}\right) = E$$

Równanie Hamiltona Jacobiego rozpada się na układ f równań

$$H_l\left(q_l, \frac{\partial S_l}{\partial q_l}\right) = E_l, l = 1, 2, \dots, f, \sum_{l=1}^f E_l = E \Rightarrow S_l = \tilde{S}_l(q_l, \beta_l) + C_l, l = 1, 2, \dots, f \Rightarrow$$

Całka zupełna równania Hamiltona Jacobiego jest sumą f całek zupełnych powyższych równań

$$S_0 = \sum_{l=1}^f \tilde{S}_l(q_l, \beta_l) + C, \quad \sum_{l=1}^f C_l + C_0 = C$$