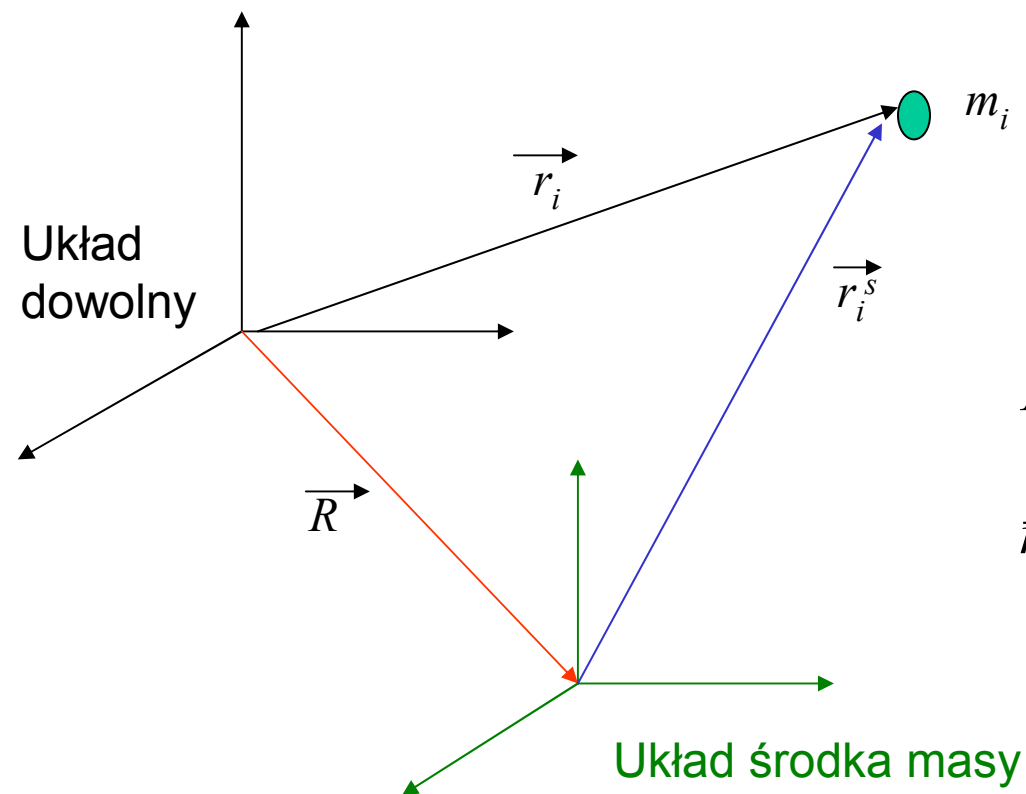
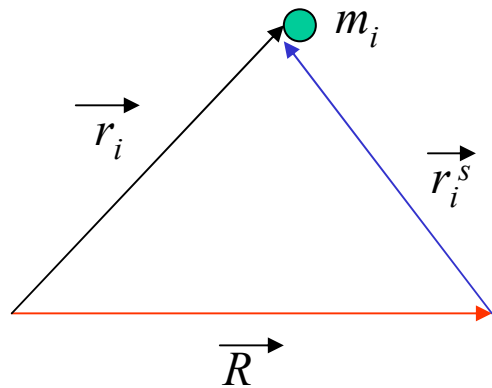


## Układ środka masy



$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_i m_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^s$$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^s + \vec{R} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i^s + \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{J}_s \equiv \sum_i \vec{r}_i^s \times \vec{p}_i^s = \sum_i \vec{r}_i^s \times m_i \dot{\vec{r}}_i^s$$

Moment pędu w układzie dowolnym i środka masy

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i^s) \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \\ &= \vec{R} \times \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \vec{r}_i^s \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{R} \times \vec{p} + \sum_i \vec{r}_i^s \times m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^s) = \\ &= \vec{R} \times \vec{p} + \sum_i \vec{r}_i^s \times m_i \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}_i^s \times m_i \dot{\vec{r}}_i^s = \vec{R} \times \vec{p} + \sum_i \vec{r}_i^s \times m_i \dot{\vec{R}} + \vec{J}_s, \end{aligned}$$

$$\sum_i \vec{r}_i^s \times m_i \dot{\vec{R}} = \left( \sum_i m_i \vec{r}_i^s \right) \times \dot{\vec{R}} = \left( \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \right) \times \dot{\vec{R}} = (M\vec{R} - M\vec{R}) \times \dot{\vec{R}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \vec{R} \times \vec{p} + \vec{J}_s}$$

## Moment siły w układzie dowolnym i środka masy

$$\vec{D}_s \equiv \sum_i \vec{r}_i^s \times \vec{F}_i$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{D} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i^s) \times \vec{F}_i = \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i^s \times \vec{F}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{D}_s}$$

## II zasada dynamiki w układzie środka masy

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{D}$$

$$\frac{d\vec{J}_s}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{R} \times \vec{p}) = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{D}_s \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{J}_s}{dt} = \vec{D}_s}$$

Moment pędu  
środka masy

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F} \Rightarrow \vec{R} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{R} \times \vec{p}) = \vec{R} \times \vec{F}$$

## Energia kinetyczna w układzie dowolnym i środka masy

$$T_s = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i^s)^2$$

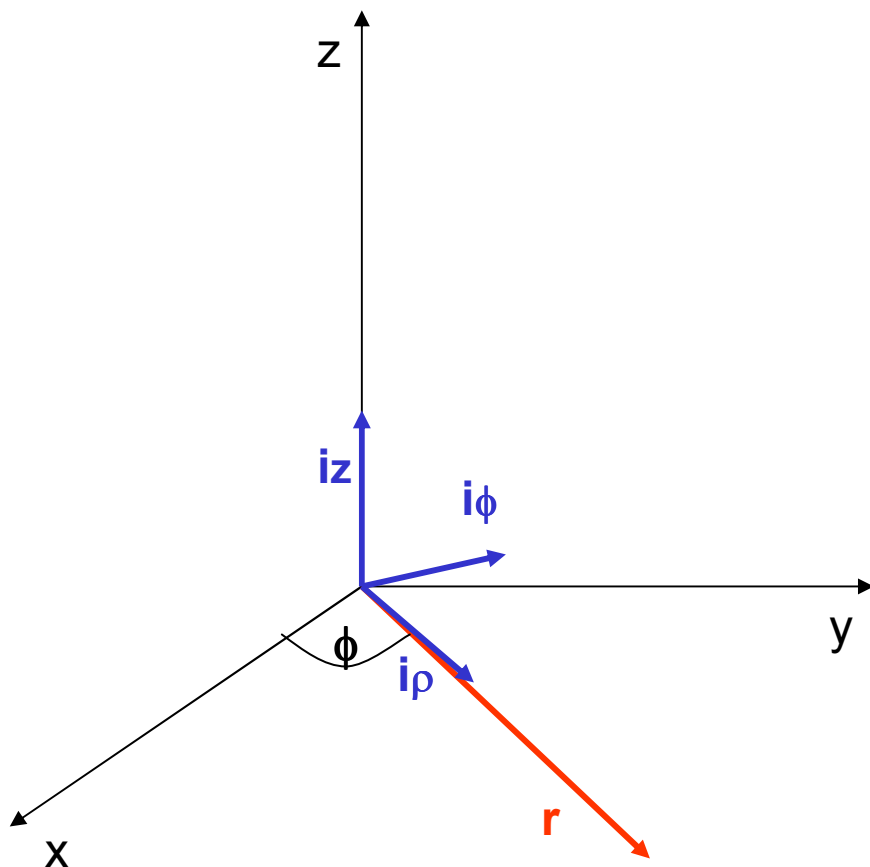
$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^s)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i^s)^2 + \sum_i m_i \dot{\vec{R}} \dot{\vec{r}}_i^s$$

$$\sum_i m_i \dot{\vec{R}} \dot{\vec{r}}_i^s = \dot{\vec{R}} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^s = \dot{\vec{R}} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}) = \dot{\vec{R}} (M\dot{\vec{R}} - M\dot{\vec{R}}) = 0$$

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{R}}^2 = \frac{1}{2} \dot{\vec{R}}^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + T_s$$

## PRĘDKOŚĆ KĄTOWA



$$\vec{i}_z = \vec{i}_\rho \times \vec{i}_\phi, \dots, \vec{i}_\phi = \vec{i}_z \times \vec{i}_\rho$$

$$\vec{r} = \vec{i}_\rho \rho$$

$$\rho = \text{const} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow v_\rho = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_\phi$$

$$\vec{v} = \vec{i}_\phi \rho \frac{d\phi}{dt} = (\vec{i}_z \times \vec{i}_\rho) \rho \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \vec{i}_z \times \rho \vec{i}_\rho$$

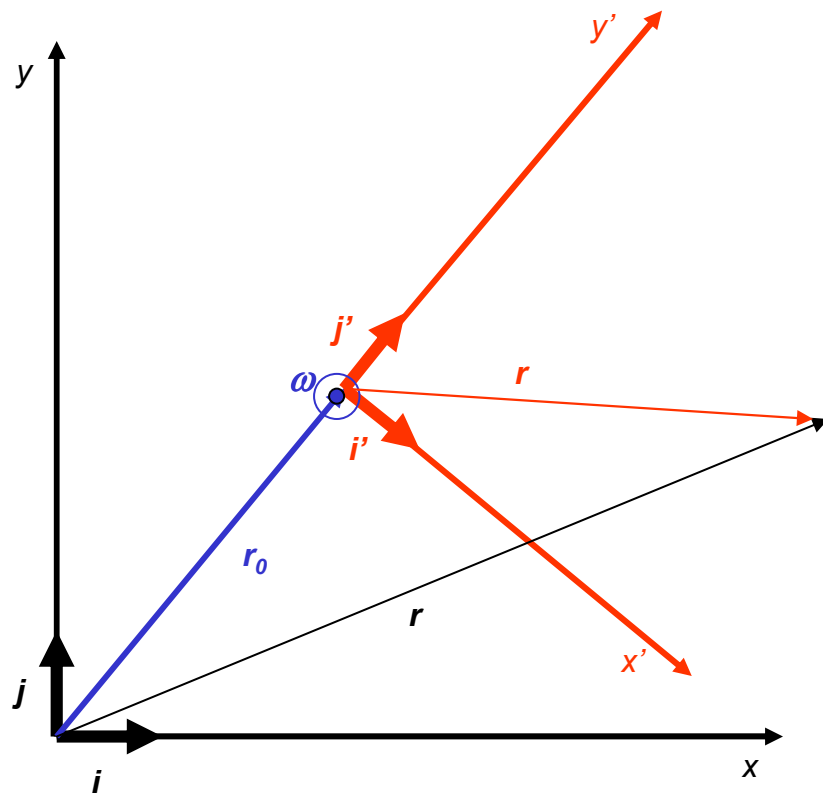
$$\vec{\omega} \equiv \vec{i}_z \frac{d\phi}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Powyższy związek jest prawdziwy dla dowolnego wektora  $\mathbf{u}$  o stałej długości, w układzie obracającym się wokół osi Oz

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}$$

## Transformacje prędkości i przyspieszenia



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{v}'$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}' = \\ &= \vec{a}_0 + \vec{a}_{dosr} + \vec{a}_C + \vec{a}' \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{dosr} \equiv -\omega^2 \vec{r}' \quad \text{przyp. dośrodkowe}$$

$$\vec{a}_C \equiv 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') \quad \text{przyp. Coriolisa}$$

Transformacja Galileusza

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

gdzie  $\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$

$$\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{v}' \equiv \frac{\delta \vec{r}'}{\delta t} \equiv \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}'$$

$$\vec{a}' \equiv \frac{\delta \vec{v}'}{\delta t} \equiv \frac{dv'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dv'_y}{dt} \vec{j}'$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\left( \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' \right)}_{=\vec{v}' = \frac{\delta\vec{r}'}{\delta t}} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{w} \Rightarrow \frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}', \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}'$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{\delta\vec{r}'}{\delta t} + \vec{\omega} \times (x'\vec{i}' + y'\vec{j}') = \frac{\delta\vec{r}'}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Transformacja prędkości

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_u + \vec{v}', \quad \vec{v}_u = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

prędkość unoszenia

$$\frac{d\vec{w}'}{dt} = \frac{\delta\vec{w}'}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{w}'$$

Związek po lewej jest prawdziwy dla dowolnego wektora  $\vec{w}'$  w układzie nieinercyjnym, ponieważ przy jego wyprowadzeniu korzystaliśmy tylko z ogólnie prawdziwego związku

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}') \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \left( \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} \right) \quad (\text{bo } \vec{\omega} = \text{const})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \left[ \frac{\delta \vec{v}'}{\delta t} + (\vec{\omega} \times \vec{v}') \right] + \left[ \vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{r}'}{\delta t} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right] = \\ &= \vec{a}_0 + [\vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}')] + [(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] = \\ &= \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} \perp \vec{r}' \Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}'$$

### Transformacja przyspieszenia

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' - \omega^2 \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') = \vec{a}_0 + \vec{a}' + \vec{a}_{dosr} + \vec{a}_C$$

$$\vec{a}_{dosr} \equiv -\omega^2 \vec{r}' \quad \text{przyspieszenie dośrodkowe}$$

$$\vec{a}_C \equiv 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') \quad \text{przyspieszenie Coriolisa}$$

$$\text{Transformacja Galileusza} \quad \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'; \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$