Algebra grafów

dr hab. Piotr Fronczak

Własności macierzy sąsiedztwa $\boldsymbol{A}$

- $A_{ij} = 1$ jeżeli istnieje krawędź pomiędzy węzłami i oraz j
- W ogólności $A_{ij} = w,\ w \in R,$ oraz $A_{ij} \neq A_{ji}$ (grafy ważone i skierowane)
- Poniżej rozważamy grafy proste
- $k_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ stopień węzła
- $A_{ik} A_{kj} = 1,$ jeżeli istnieje droga o długości 2 od węzła i do węzła j przez k
- $N_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} A_{kj} = [A^2]_{ij}$
- $N_{ij}^{(3)} = \sum_{k,l=1}^{n} A_{ik} A_{kl} A_{lj} = [A^3]_{ij}$
- $N_{ij}^{(r)} = [A^r]_{ij}$
- $L_r = \sum_{i=1}^{n} [A^r]_{ii} = \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{A}^r$ (pętle, które liczymy od innego punktu początkowego, liczymy osobno)
- Najkrótsza droga: najmniejsza wartość r taka, że $[A^r]_{ij} > 0.$

Laplasjan grafu $\boldsymbol{L}$

<u>Dyfuzja</u>

Niech ψ_i - wartość pewnej wielkości w węźle i.
$C(\psi_j - \psi_i)$ – tempo przepływu wielkości z węzła j do i

współczynnik dyfuzji

W ciągu czasu dt przepływa $C(\psi_j - \psi_i)dt$.

$$\frac{d\psi_i}{dt} = C\sum_j A_{ij}(\psi_j - \psi_i)$$

Równanie dyfuzji

$$\frac{d\psi_i}{dt} = C\sum_j A_{ij}\psi_j - C\,\psi_i\sum_j A_{ij} = C\sum_j A_{ij}\psi_j - C\,\psi_i k_i = C\sum_j (A_{ij} - \delta_{ij}k_i)\psi_j$$

W postaci macierzowej: $$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = C(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D})\boldsymbol{\psi}$$

macierz

wektor

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & k_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & k_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = C(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D})\boldsymbol{\psi}$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$$

laplasjan grafu

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + C\boldsymbol{L}\boldsymbol{\psi} = 0$$

II prawo Ficka

$$\frac{dn(\vec{x},t)}{dt} - C\Delta n(\vec{x},t) = 0$$

Rozwiązując równanie:

$\boldsymbol{\psi}(t) = \sum_i a_i(t)\boldsymbol{v_i}$ - liniowa kombinacja wektorów własnych

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \sum_i \frac{da_i}{dt}\boldsymbol{v_i}$$

oraz

$$C\boldsymbol{L}\boldsymbol{\psi} = \sum_i C a_i(t)\boldsymbol{L}\boldsymbol{v_i} = \sum_i C\lambda_i a_i(t)\boldsymbol{v_i}$$

bo $\boldsymbol{L}\boldsymbol{v_i} = \lambda_i \boldsymbol{v_i}$

$$\sum_i \left(\frac{da_i}{dt} + C\lambda_i a_i(t)\right)\boldsymbol{v_i} = 0$$

Wektory własne macierzy symetrycznej są ortogonalne, zatem

$$\frac{da_i}{dt} + C\lambda_i a_i(t) = 0,$$ dla każdego *i*.

$$a_i(t) = a_i(0)e^{-C\lambda_i t}$$

Czyli, mając dane warunki początkowe $a_i(0)$ oraz wartości i wektory własne laplasjanu, możemy rozwiązać zagadnienie dyfuzji na sieci.

- Laplasjan jest macierzą symetryczną, więc ma rzeczywiste wartości własne
- Można pokazać, że $\lambda_i \geq 0$ dla każdego *i*.

$$\boxed{a_i(t) = a_i(0)e^{-C\lambda_i t}}$$

- Rozważmy iloczyn $\boldsymbol{L} \cdot \mathbf{1}$

$$\sum_j L_{ij} \cdot 1 = \sum_j \left(\delta_{ij} k_i - A_{ij}\right) = k_i - \sum_j A_{ij} = k_i - k_i = 0$$

$$\boldsymbol{L} \cdot \mathbf{1} = 0 \cdot \mathbf{1}$$

Zatem, jeśli $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, to $\lambda_1 = 0$.

- Wyznacznik macierzy jest iloczynem wartości własnych, zatem laplasjan to macierz osobliwa.

- Stwórzmy sieć złożoną z *k* komponentów. Każdy z komponentów ma własny laplasjan. Zatem mamy macierz blokową

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{L}_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \boxed{\mathbf{L}_k} \end{bmatrix}$$

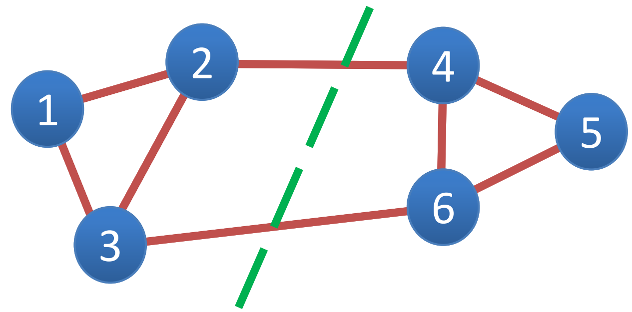
- Możemy napisać k różnych wektorów własnych z $\lambda = 0$, *np:*

$$\boldsymbol{v_1} = (\underbrace{1,1,1,1}_{\text{komponent nr } 1},0,0,0,\underbrace{0,0,0,0,0,0}_{\text{komponent nr } k}) \qquad \boldsymbol{v_k} = (\underbrace{0,0,0,0}_{\text{komponent nr } 1},0,0,0,\underbrace{1,1,1,1,1,1}_{\text{komponent nr } k})$$

- Zatem mamy *k* wartości własnych $\lambda = 0$.
- Sieć jest spójna tylko, gdy $\lambda_2 \neq 0$
- λ_2 – spójność algebraiczna.

Podział spektralny grafu

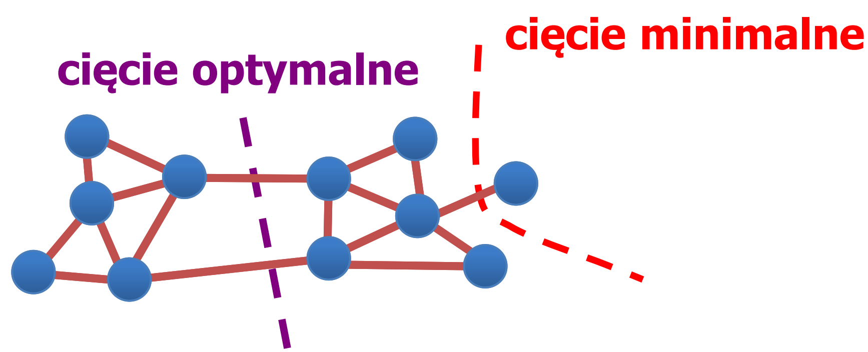
- Cel: podzielić węzły w sieci na dwie rozłączne grupy X i Y



- Jak podzielić dobrze?
- Minimalizujmy liczbę połączeń między klastrami $cut(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i \in X, j \notin X} A_{ij}$

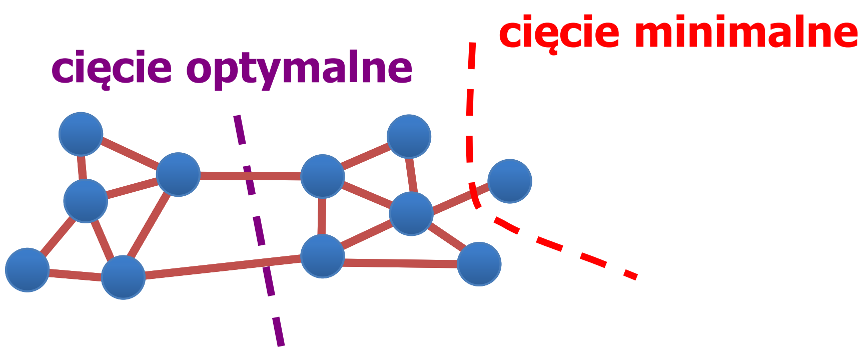
$$\arg\min_{X,Y} cut(X,Y)$$

- Przykład:



- Cięcie normalizowane: $ncut(X,Y) = \frac{cut(X,Y)}{vol(X)} + \frac{cut(X,Y)}{vol(Y)}$

$vol(X) = \sum_{i \in X} A_{ij}$ $\quad (liczba\ krawędzi\ rozpoczynających\ się\ w\ grupie\ X)$



$$\boldsymbol{ncut(X,Y) = \frac{1}{33} + \frac{1}{1}}$$

$$\boldsymbol{ncut(X,Y) = \frac{2}{16} + \frac{2}{18}}$$

- Zdefiniujmy wektor **s** taki, że

$$s_i = \begin{cases} +1 & jeżeli\ węzeł\ i\ należy\ do\ grupy\ 1 \\ -1 & jeżeli\ węzeł\ i\ należy\ do\ grupy\ 2 \end{cases}$$

- Wtedy $\frac{1}{2}(1 - s_i s_j) = \begin{cases} 1 & jeżeli\ i\ oraz\ j\ są\ w\ różnych\ grupach \\ 0 & jeżeli\ i\ oraz\ j\ są\ w\ tej\ samej\ grupie \end{cases}$

- $cut(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i\in X, j\notin X} A_{ij} = \frac{1}{4}\sum_{ij} A_{ij}(1 - s_i s_j)$

- $\sum_{ij} A_{ij} = \sum_i k_i = \sum_i k_i\, s_i^{\,2} = \sum_{ij} k_i \delta_{ij} s_i s_j$

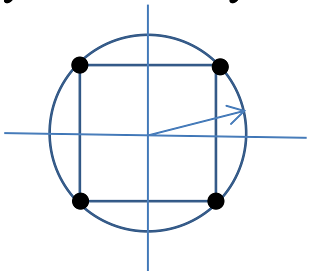
- $cut(X,Y) = \frac{1}{4}\sum_{ij}(k_i\delta_{ij} - A_{ij})s_i s_j = \frac{1}{4}\sum_{ij} L_{ij} s_i s_j = \frac{1}{4}\boldsymbol{s^T L s}$

  Czyli znalezienie najlepszego cięcia = znalezienie wektora **s**, który minimalizuje powyższe wyrażenie.

- Problem NP-trudny. Metoda relaksacji: $s_i = \pm 1 \quad \rightarrow \quad s_i \in \mathcal{R}$

- By zapobiec trywialnemu rozwiązaniu **s** = 0, wprowadzamy dodatkowy wiąz

$$\sum_i s_i^{\,2} = n$$



- Drugi wiąz: chcemy, by grupy były zbalansowane:

  $\sum_i s_i = \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \quad \mathbf{1}^T \cdot \boldsymbol{s} = \varepsilon,$ $\quad$ ($\mathbf{1}$ – wektor jednostkowy $\boldsymbol{L} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$)

- Metoda mnożników Lagrange'a

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\left[\sum_{jk} L_{jk} s_j s_k + \lambda\left(n - \sum_j {s_j}^2\right) + 2\mu\left(\varepsilon - \sum_j s_j\right)\right] = 0$$

$$\sum_j L_{ij} s_j = \lambda s_i + \mu$$

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{s} = \lambda \boldsymbol{s} + \mu \mathbf{1}$$

- Mnożymy lewostronnie przez $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$

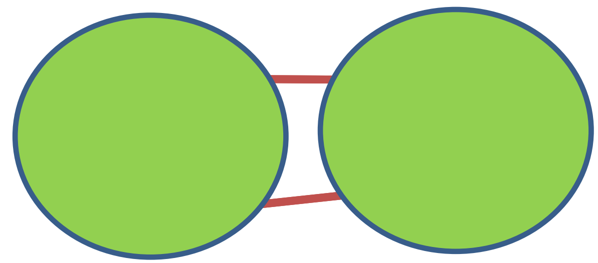
$$\underbrace{\mathbf{1}^T \boldsymbol{L}}_{0} \cdot \boldsymbol{s} = \lambda \underbrace{\mathbf{1}^T \cdot \boldsymbol{s}}_{\approx 0} + \mu \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{1}, \qquad \text{czyli } \mu = 0$$

- $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{s} = \lambda \boldsymbol{s}$ – czyli **s** jest wektorem własnym a λ wartością własną $\boldsymbol{L}$

- $cut(X,Y) = \frac{1}{4}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{L}\boldsymbol{s} = \frac{1}{4}\lambda\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}$

  Najlepsze cięcie da wektor $\boldsymbol{s}$ z najmniejszą wartością własną λ

- λ_1=0 odpada, bo wtedy **s=1**
- Zatem wybieramy λ_2. Wektor **s** – wektor Fiedlera



Algorytm

1. Konstruujemy laplasjan ***L*** grafu

	x₁	***x₂***	***x₃***	***x₄***	***x₅***	***x₆***
x₁		-1	-1	0	0	0
x₂	-1		-1	-1	0	0
x₃	-1	-1		0	0	-1
x₄	0	-1	0		-1	-1
x₅	0	0	0	-1		-1
x₆	0	0	-1	-1	-1	

2. Znajdujemy wartości i wektory własne ***L***

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Przypisujemy węzłom odpowiednie elementy wektora $\boldsymbol{v_2}$

x_1	-2
x_2	-1
x_3	-1
x_4	1
x_5	2
x_6	1

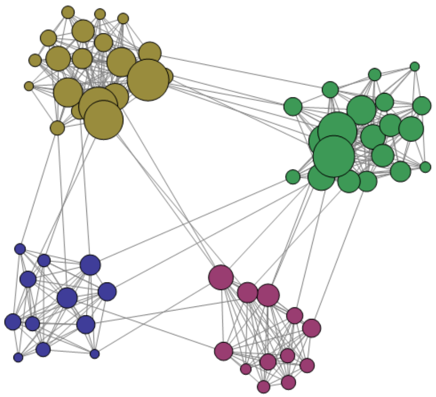
4. Dzielimy węzły na dwie grupy. Punkt podziału: 0, średnia, mediana.

   Możemy też wybrać punkt podziału minimalizując cięcie (przeszukiwanie jednowymiarowe).

- Jak podzielić graf na *k* grup?
- a) rekurencyjna bisekcja

  nieefektywna $O(n^3)$, niestabilna

  b) wykorzystanie wielu wektorów własnych do stworzenia przestrzeni rozpinającej

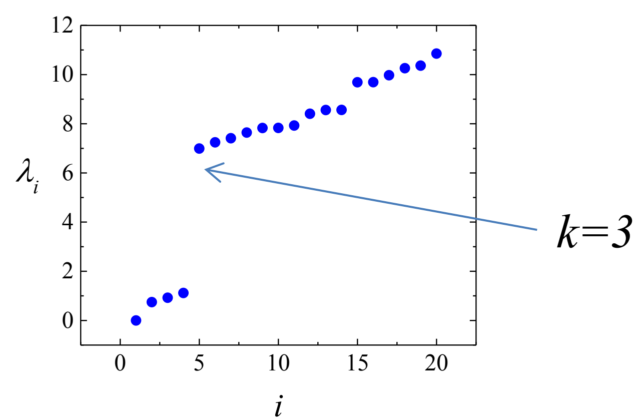


<u>Algorytm</u>

1. Konstruujemy laplasjan **L** grafu.
2. Znajdujemy *k* najmniejszych niezerowych wartości własnych i odpowiadających im wektorów.
3. Jak wybrać *k*?

$\Delta_k = |\lambda_{k+1} - \lambda_k|$ - eigengap (przerwa własna?)

$k\colon \max\limits_k \Delta_k$

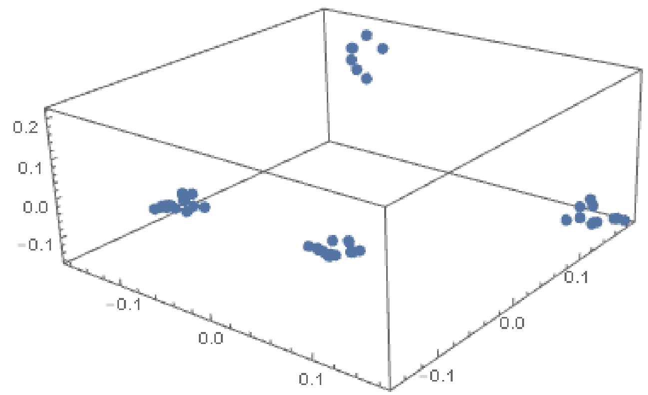


Algorytm c.d.

3. Tworzymy macierz $n \times k$ zbudowaną z k wektorów własnych:

$$U = \begin{bmatrix} u_1(x_1) & \cdots & u_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_k(x_1) & \cdots & u_k(x_n) \end{bmatrix}$$

4. Każda kolumna i reprezentuje współrzędne węzła x_i w nowej przestrzeni.



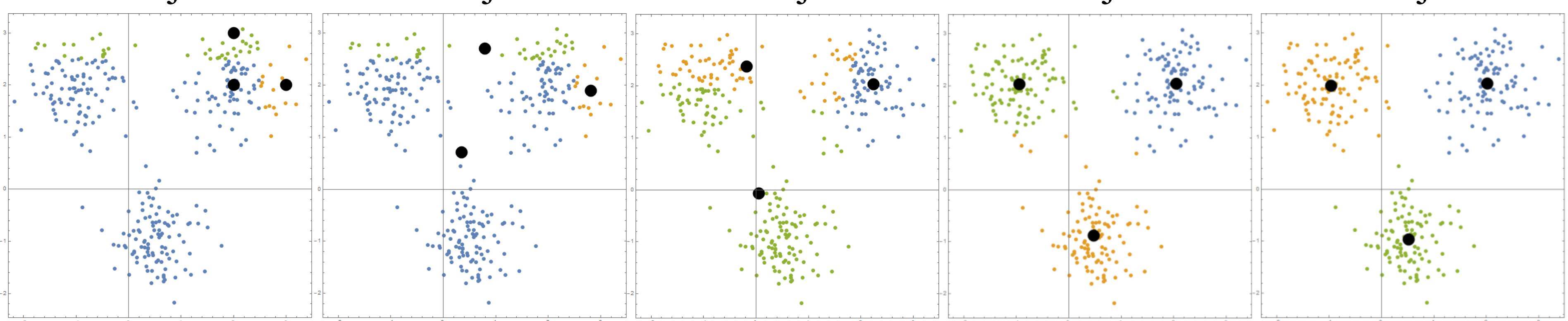
5. Wykorzystujemy jedną z metod grupowania danych, np. K-średnich.

Algorytm K-średnich

1. Wybierz *K* punktów jako początkowe centroidy
2. **REPEAT**
    3. Utwórz K grup przypisując wszystkie punkty najbliższym centroidom.
    4. Przelicz położenie centroidów dla każdej grupy
5. **UNTIL** położenia centroidów nie zmieniają się

➢ <u>Przykład</u>

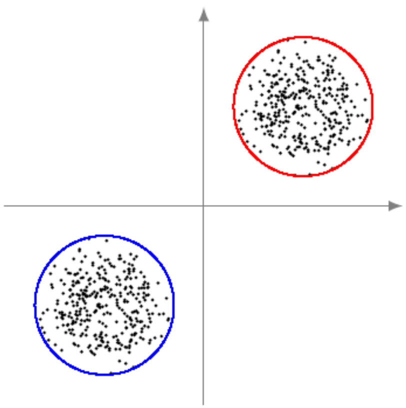
iteracja 0 | iteracja 1 | iteracja 2 | iteracja 3 | iteracja 4

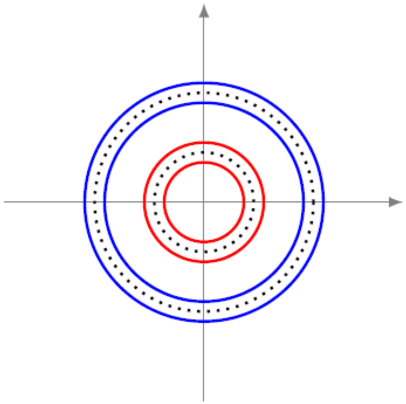


➢ DYGRESJA

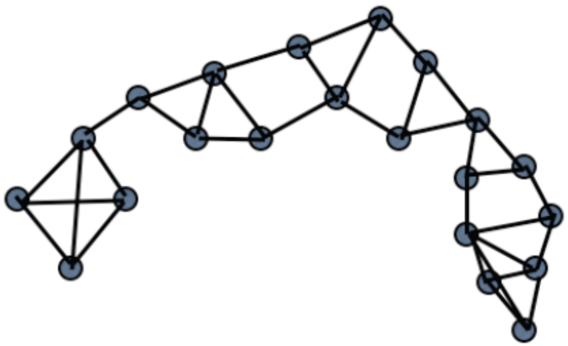
➢ Metodę K-średnich i podobne inne metody można użyć do grupowania dowolnych danych (nie tylko węzłów w grafach) w oparciu o podobieństwa względem różnych cech.

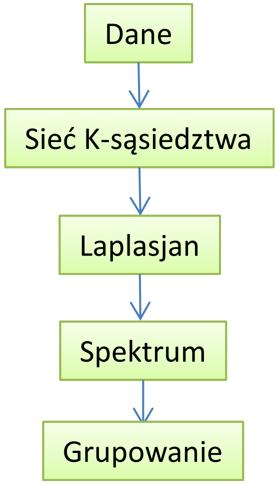
➢ Nie zawsze to działa:





➢ Aby zadziałało, tworzymy sieć K-sąsiedztwa





MODULARNOŚĆ

- Miara jakości podziału Q

$$Q = \frac{1}{m}\sum_i (\# \; krawędzi \; w \; grupie \; i \; - $$

$$oczekiwana \; \# \; krawędzi \; w \; grupie \; i \; w \; grafie \; losowym \; o \; tej \; samej \; sekwencji \; stopni)$$

- Trywialny podział: wszystkie węzły w jednej grupie → $Q = 0$
- Jeżeli c_i – grupa węzła i

$$\# = \sum_{krawędzie \; (i,j)} \delta(c_i, c_j) = \frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\delta(c_i, c_j)$$

$$\# = \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{k_i k_j}{2m}\delta(c_i, c_j)$$

$$Q = \frac{1}{2m}\sum_{ij}\left(A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m}\right)\delta(c_i, c_j) = \frac{1}{2m}\sum_{ij} B_{ij}\delta(c_i, c_j)$$

$$B_{ij} = A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m}$$ macierz modularności

- Własność macierzy B:

$$\sum_j B_{ij} = \sum_j A_{ij} - \frac{k_i}{2m}\sum_j k_j = k_i - \frac{k_i}{2m}2m = 0$$

- Zdefiniujmy wektor **s** taki, że

$$s_i = \begin{cases} +1 & jeżeli\ węzeł\ i\ należy\ do\ grupy\ 1 \\ -1 & jeżeli\ węzeł\ i\ należy\ do\ grupy\ 2 \end{cases}$$

- Wtedy $\frac{1}{2}(s_i s_j + 1) = \begin{cases} 1 & jeżeli\ i\ oraz\ j\ są\ w\ tej\ samej\ grupie \\ 0 & jeżeli\ i\ oraz\ j\ są\ w\ różnych\ grupach \end{cases}$
- $\delta(c_i, c_j) = \frac{1}{2}(s_i s_j + 1)$
- $Q = \frac{1}{2m}\sum_{ij} B_{ij}\delta(c_i, c_j) = \frac{1}{4m}\sum_{ij} B_{ij}(s_i s_j + 1) = \frac{1}{4m}\sum_{ij} B_{ij} s_i s_j = \frac{1}{4m}\boldsymbol{s^T B s}$
- Przypomnienie: $cut(X, Y) = \frac{1}{4}\boldsymbol{s^T L s}$
- Działamy podobnie ale odwrotnie: szukamy podziału, który <u>maksymalizuje</u> *Q*

- Wprowadzamy tylko jeden wiąz (grupy mogą być teraz różnoliczne)

$$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{s} = \sum_i {s_i}^2 = n$$

- Równanie Lagrange'a

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\left[\sum_{jk} B_{jk} s_j s_k + \beta\left(n - \sum_j {s_j}^2\right)\right] = 0$$

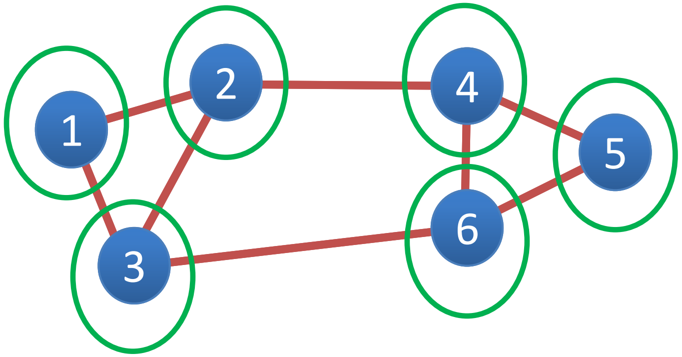
$$\sum_j B_{ij} s_j = \beta s_i$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{s} = \beta \boldsymbol{s}$$

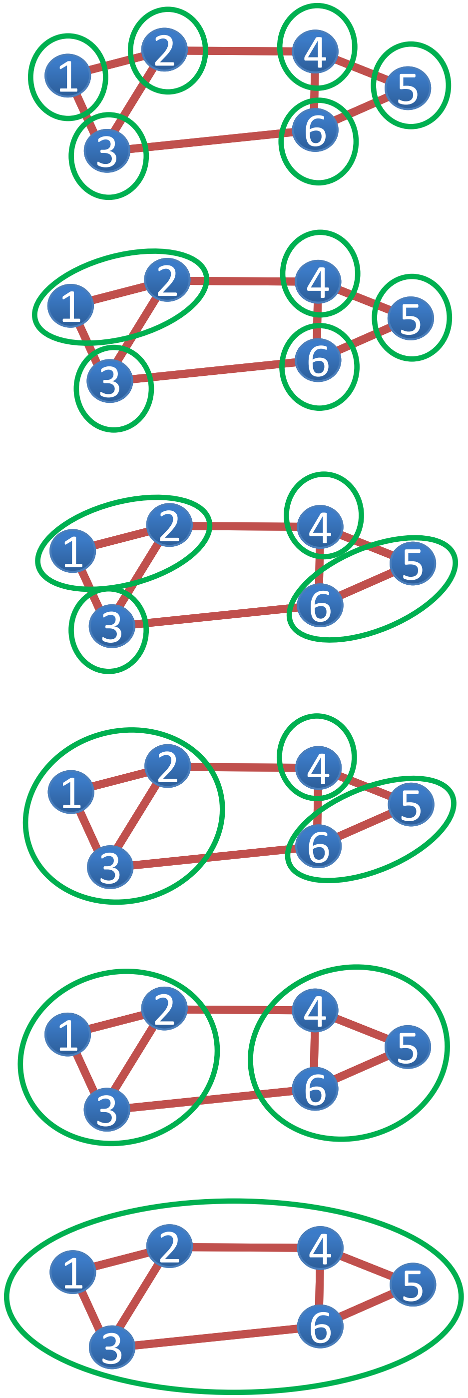
- $Q = \frac{1}{4m}\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{s} = \frac{1}{4m}\beta\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{s} = \frac{n}{4m}\beta$
- Zatem szukamy wektora własnego o największej wartości własnej
- Przypomnienie z Metod Numerycznych: *szybka Metoda Potęgowa znajdowania największej wartości własnej i związanego z nią wektora własnego.*

- Podział na więcej niż dwie grupy
- Problem NP. Wiele metod heurystycznych:
  wyżarzanie, algorytmy genetyczne
- Greedy algorithm :

  Początkowo umieszczamy każdy węzeł w innej grupie



Następnie sprawdzamy, połączenie których dwóch grup da największy wzrost (lub najmniejszy spadek) modularności



$Q = 0$

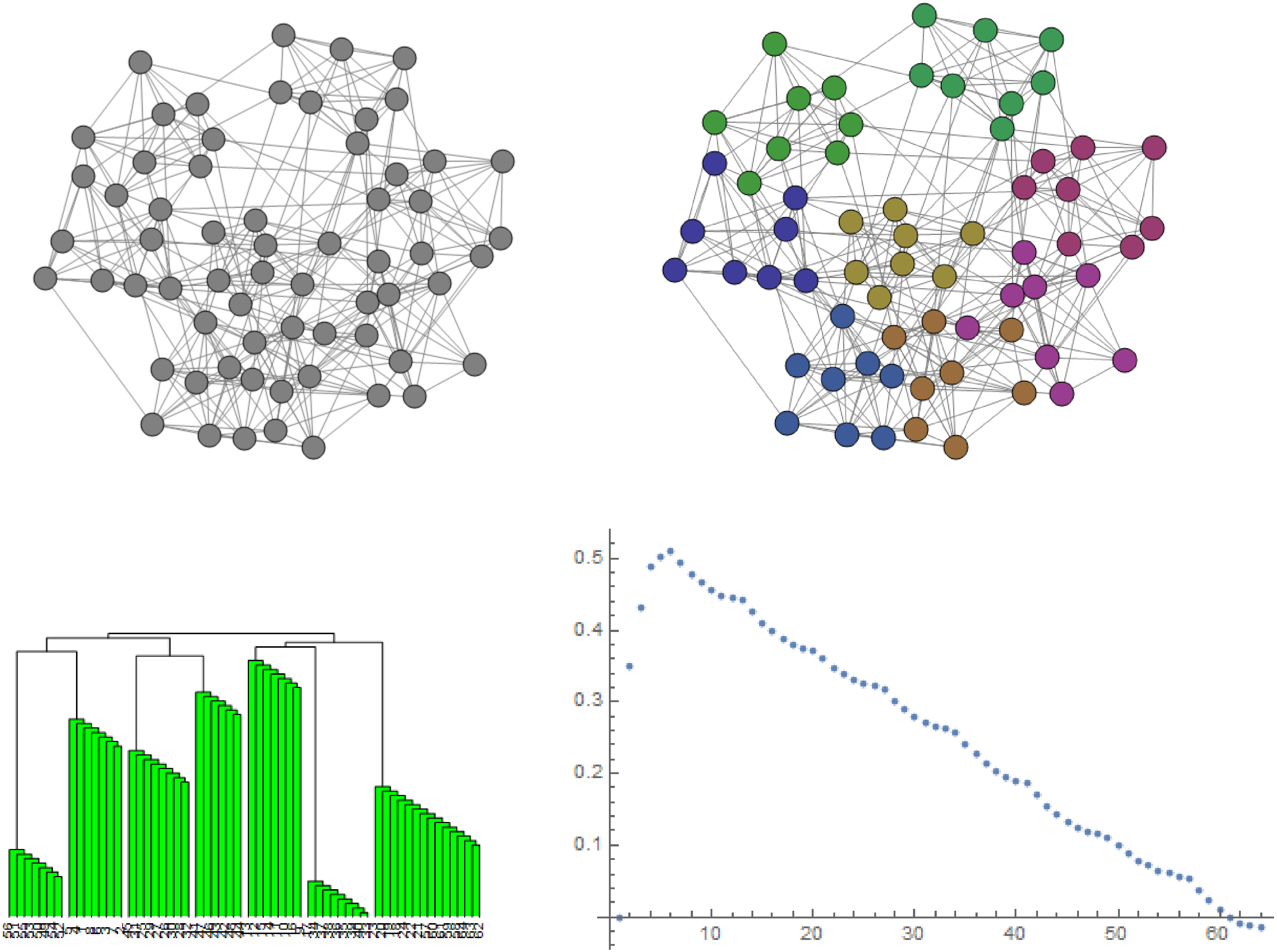
$Q = 0.078$

$Q = 0.156$

$Q = 0.289$

$Q = 0.422 \quad \longleftarrow \quad Q_{max}$

$Q = 0.172$


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
10
20
30
40
50
60

BŁĄDZENIE PRZYPADKOWE PO SIECI

- $p_i(t)$ – prawdopodobieństwo, że cząstka (pakiet, osobnik) znajduje się w węźle i w chwili t.
- Jeśli w chwili t-1 cząstka jest w węźle j, to $p_{j\to i}(t) = \frac{A_{ij}}{k_j} p_j(t-1)$

$$p_i(t) = \sum_j \frac{A_{ij}}{k_j} p_j(t-1)$$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p}(t-1)$$

$\boldsymbol{D}$ – macierz diagonalna stopni węzłów

- Rozkład graniczny dla $t \to \infty$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p}$$

$$\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\right)\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p}$ – wektor własny laplasjanu o wartości własnej *0*.

- Pamiętamy, że $\boldsymbol{v}_\mathbf{1} = \alpha\mathbf{1}$, zatem $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{D}\mathbf{1}$ oraz $p_i = \alpha k_i$.
- Po unormowaniu

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} = \frac{k_i}{2m}$$

BŁĄDZENIE PRZYPADKOWE PO SIECI

- $p_i(t)$ – prawdopodobieństwo, że cząstka (pakiet, osobnik) znajduje się w węźle i w chwili t.
- Jeśli w chwili $t\text{-}1$ cząstka jest w węźle j, to $p_{j\to i}(t) = \frac{A_{ij}}{k_j} p_j(t-1)$

$$p_i(t) = \sum_j \frac{A_{ij}}{k_j} p_j(t-1)$$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p}(t-1)$$

$\boldsymbol{D}$ – macierz diagonalna stopni węzłów

- Rozkład graniczny dla $t \to \infty$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p}$$

$$\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\right)\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{D}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{p}$ – wektor własny laplasjanu o wartości własnej 0.

- Pamiętamy, że $\boldsymbol{v}_\mathbf{1} = \alpha\mathbf{1}$, zatem $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{D}\mathbf{1}$ oraz $p_i = \alpha k_i$.
- Po unormowaniu

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} = \frac{k}{2m}$$

- Można pokazać, że dla błądzenia z preferencją k^{β}

$$p_i \sim {k_i}^{\beta+1}$$

- Zatem dla $\beta = -1$

- Można pokazać, że dla błądzenia z preferencją k^{β}

$$p_i \sim {k_i}^{\beta+1}$$

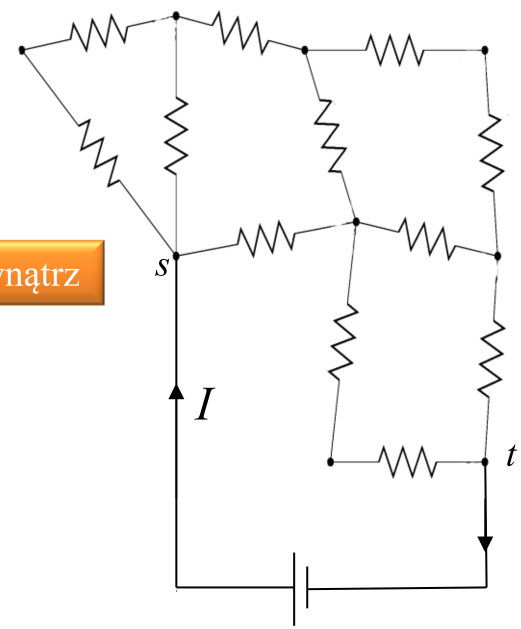
- Zatem dla $\beta = -1$

SIECI REZYSTOROWE

Prawo Kirchhoffa

$$\sum_j A_{ij} \frac{V_j - V_i}{R} + I_i = 0$$

Prąd dopływający z zewnątrz



W naszym przypadku

$$I_i = \begin{cases} +I & dla\ i = s \\ -I & dla\ i = t \\ 0 & dla\ i \neq s \neq t \end{cases}$$

$$V_i \sum_j A_{ij} - \sum_j A_{ij} V_j = R I_i$$

$$k_i V_i - \sum_j A_{ij} V_j = R I_i$$

$$\sum_j (\delta_{ij} k_i - A_{ij}) V_j = R I_i$$

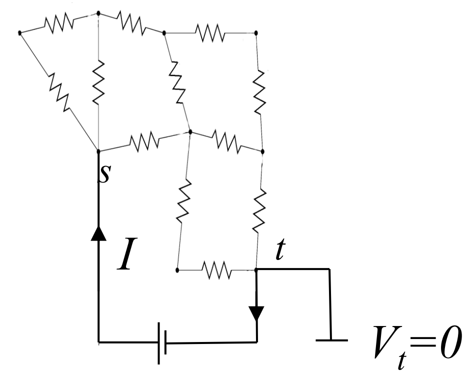
$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{V} = R\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{V} = R\boldsymbol{I}$$

- Pamiętamy, że $\boldsymbol{L}$ – macierz osobliwa, więc nie możemy znaleźć wektora $\boldsymbol{V}$ z powyższego równania.
- Napięcia są ustalone z dokładnością do stałej:

$$\boldsymbol{L}\,(\,\boldsymbol{V} + c\boldsymbol{1}\,) = \boldsymbol{LV} + c\boldsymbol{L1} = \boldsymbol{LV} = R\boldsymbol{I}$$

- Ustalmy potencjał odniesienia.
- Możemy teraz usunąć kolumnę t z laplasjanu (bo i tak mnożymy przez 0).
- A także wiersz t, bo znamy V_t.
- Nowe równanie:



$$\boldsymbol{L}' \cdot \boldsymbol{V}' = R\boldsymbol{I}'$$ bo $\boldsymbol{L}'$ – macierz nieosobliwa

Tylko jeden element niezerowy

- I teraz:

$$\boldsymbol{V}' = R\boldsymbol{L}'^{-1}\boldsymbol{I}$$

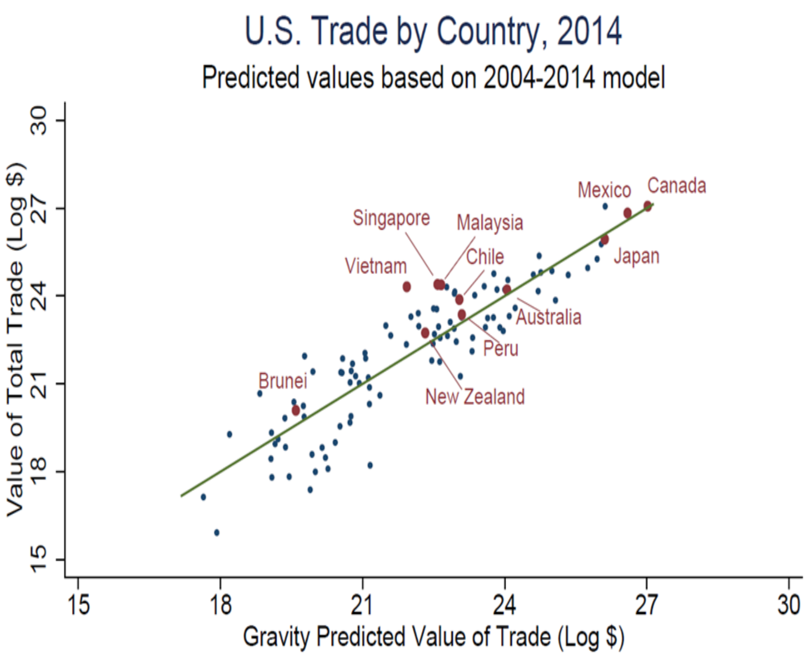
- Przykład: Model grawitacyjny w sieciach dystrybucyjnych

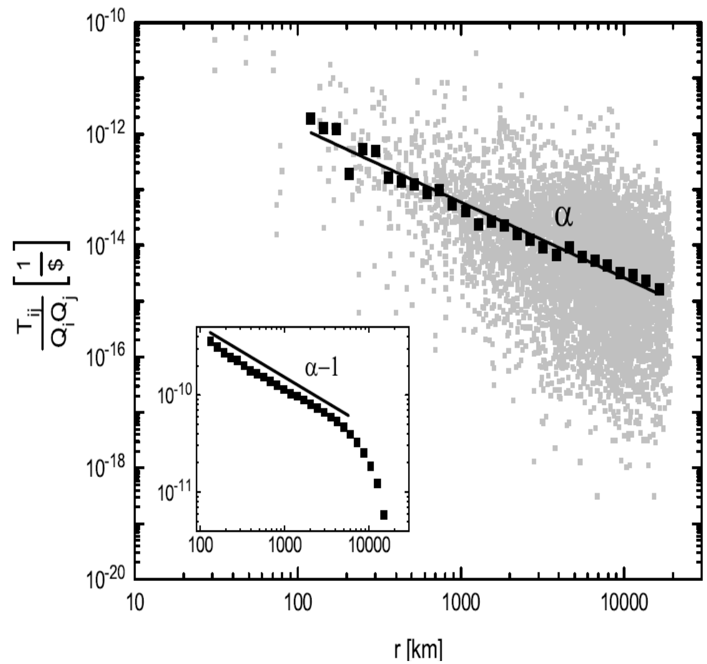
$$\omega_{ij} = G\,\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^{\ \alpha}}$$

Produkt krajowy brutto

Wielkość przepływu

odległość między krajami





➢ Sieć połączeń lotniczych między krajami

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{V} = R\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{L_{admit}} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$$

macierz admitancji węzłowej

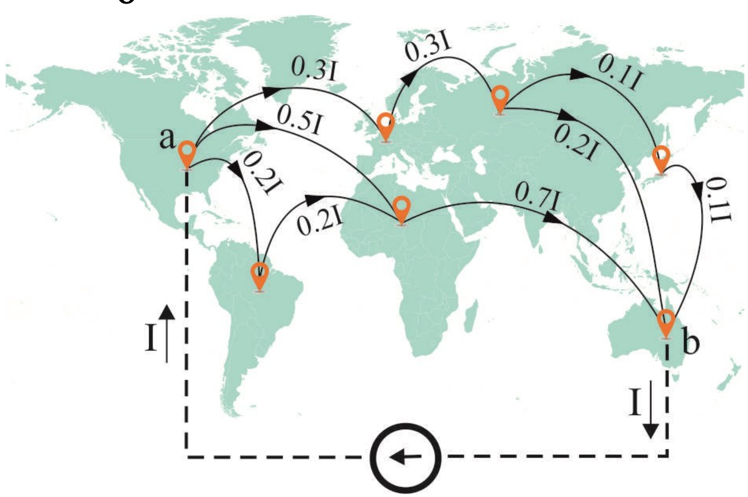
$$\boldsymbol{L_{admit}} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{F}$$

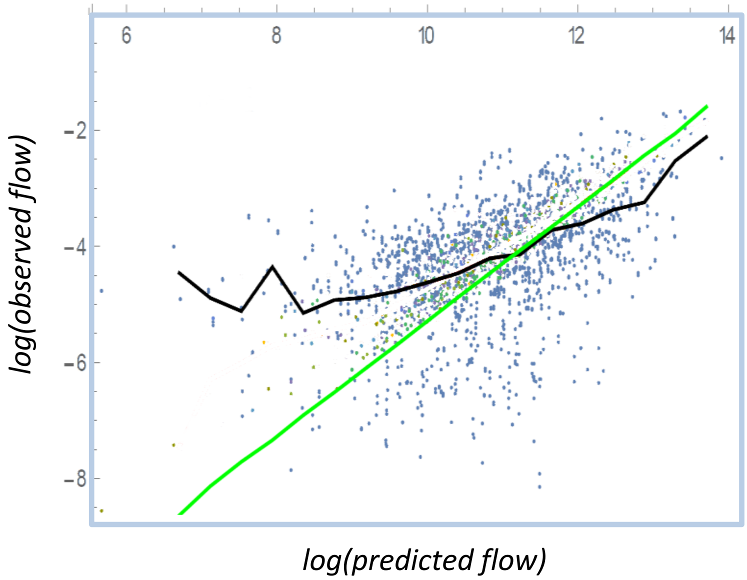
diagonalna macierz sił węzłów

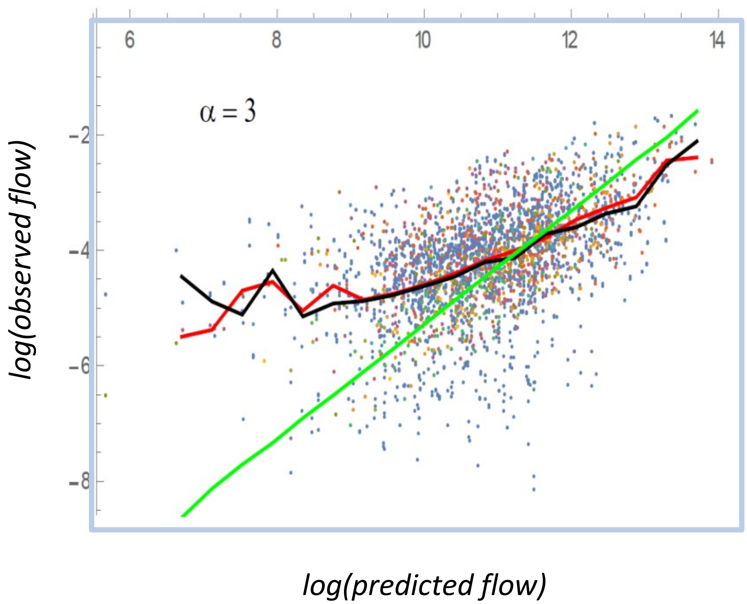
ważona ilością pasażerów
macierz sąsiedztwa
(na podst. modelu graw.)

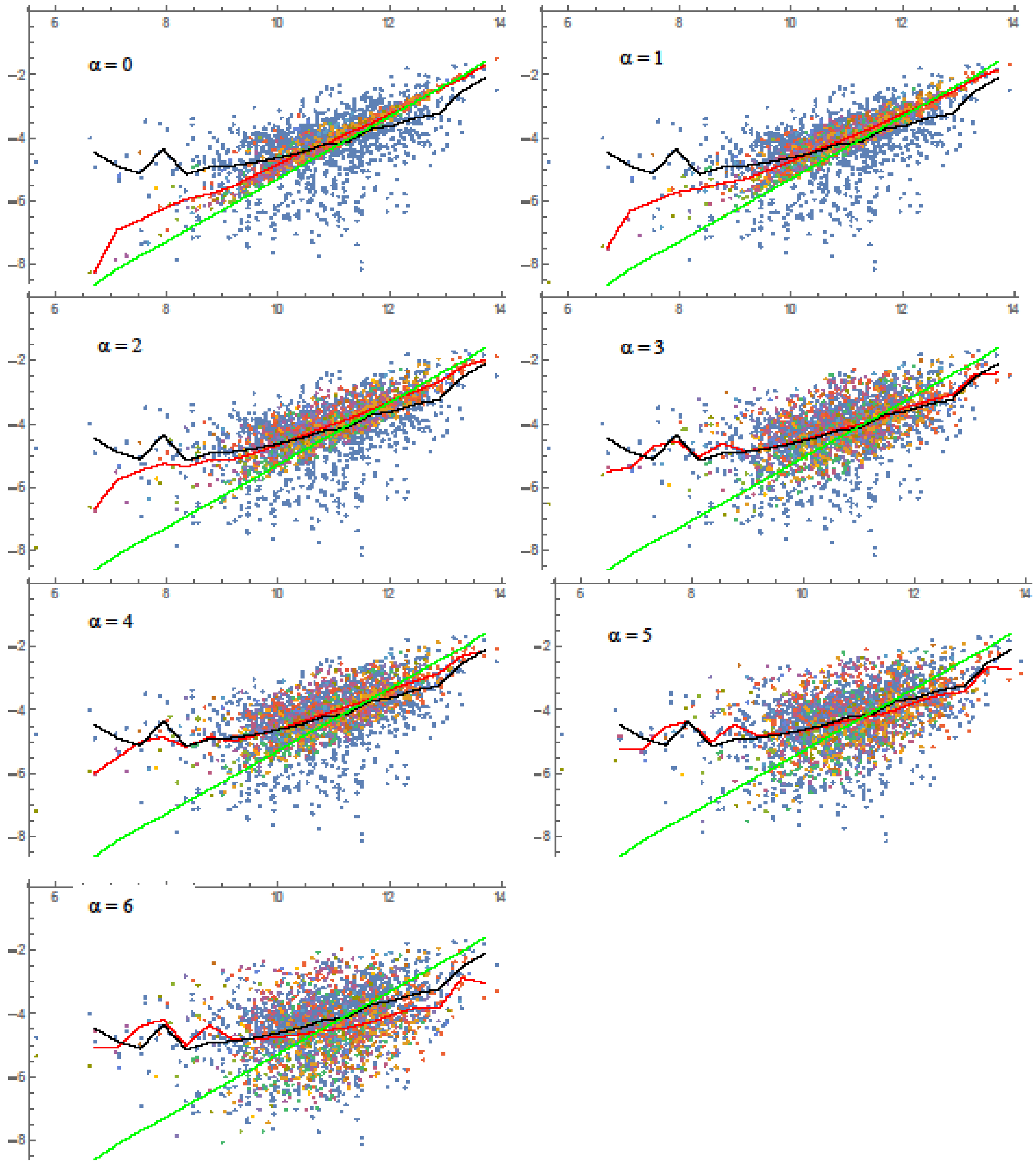
$$F_{ij} = G\frac{Q_i Q_j}{{r_{ij}}^{\alpha}}$$

$$I_{ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ Q_a Q_b \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$








α = 0
α = 1
α = 2
α = 3
α = 4
α = 5
α = 6