

Metody numeryczne

Wykład nr 10

Równania różniczkowe cząstkowe

dr hab. Piotr Fronczak

Równania różniczkowe cząstkowe (RRC)

- liczba zmiennych ≥ 2

$$u = u(x, y, \dots)$$

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

- rząd równania: rząd najwyższej pochodnej

$$u_x - b^3 u_y = 0$$

$$u_{xx} + u_y^3 = 0$$

$$u_x + u_{yyy} = 0$$

- charakterystyka: liniowe, quasi-liniowe, nieliniowe

$$a(\cdot) u_x + b(\cdot) u_y + c(\cdot) = 0$$

$$a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)$$

$$(\cdot) \equiv (x, y) \quad \dots \text{Liniowe}$$

$$(\cdot) \equiv (x, y, u) \quad \dots \text{Quasi-liniowe}$$

$$(\cdot) \equiv (x, y, u, u_x, u_y) \quad \dots \text{Nieliniowe}$$

$$u_x + bu_y = 0$$

$$u_x + u \cdot u_y + x^2 = 0$$

$$u_x + (u_y)^2 = 0$$

$$A(\cdot)u_{xx} + B(\cdot)u_{xy} + C(\cdot)u_{yy} + D(\cdot)u_x + E(\cdot)u_y + F(\cdot) = 0$$

$$A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot):$$

$$(\cdot) \equiv (x, y) \quad \dots \text{Liniowe}$$

$$(\cdot) \equiv (x, y, u, u_x, u_y) \quad \dots \text{Quasi-liniowe}$$

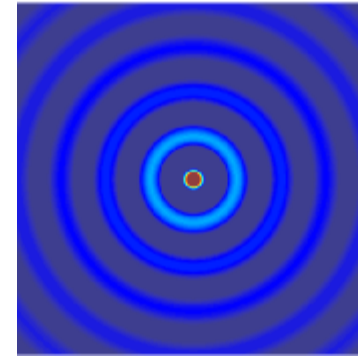
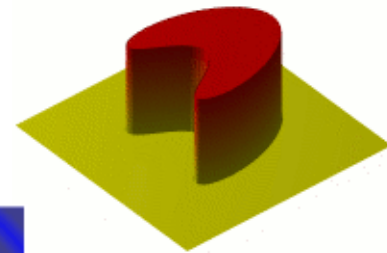
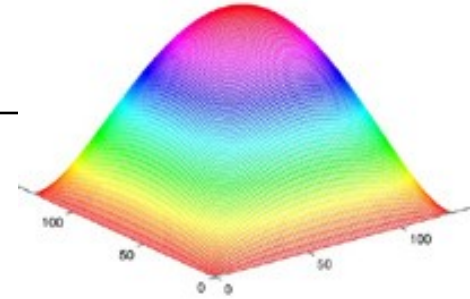
$$(\cdot) \equiv (x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \quad \dots \text{Nieliniowe}$$

- Skupmy się na RRC co najwyżej drugiego rzędu – najpopularniejsze w fizyce
- Ogólna postać RRC drugiego rzędu

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y)$$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = G(u, u_x, u_y, x, y)$$

B^2-4AC	Kategoria	Przykład
< 0	eliptyczne	Równanie Laplace'a $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	paraboliczne	Równanie przewodnictwa ciepła $k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$
> 0	hiperboliczne	Równanie falowe $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$



Motywacja dla takiej klasyfikacji

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = C \quad \text{hiperboliczne}; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = C \quad \text{paraboliczne}; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = C \quad \text{eliptyczne}$$

Najprostsze rozwiązania:

$$u = \frac{C}{4}(x^2 - y^2) \quad \text{hiperbola}; \quad u = \frac{C}{2}x^2 \quad \text{parabola}; \quad u = \frac{C}{4}(x^2 + y^2) \quad \text{elipsa}$$

Również dla bardziej skomplikowanych równań lokalne własności rozwiązanie zależą od znaku wyrażenia $B^2 - 4AC$.

Zagadka: Skategoryzuj równanie Schrodingera.

$$u_{xx} + iCu_y = 0$$

Eliptyczne RRC - dwuwymiarowe zagadnienie brzegowe

Równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- Zakładamy $h_x = h_y = h$ [siatka kwadratowa]
- $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$
- $u(x_i + h, y_j + h) = u_{i+1, j+1}$,

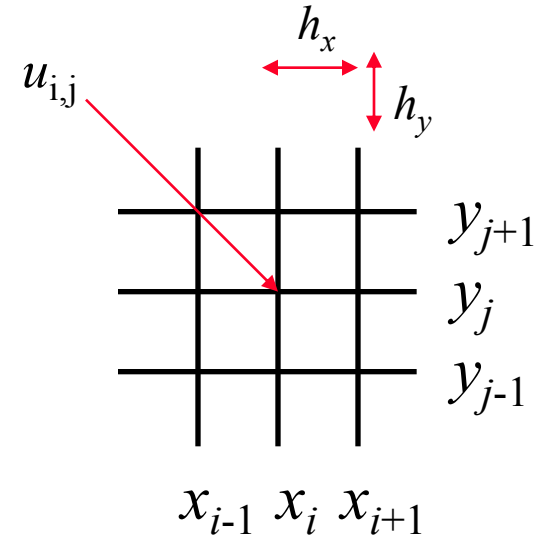
$$u''(x_i, y_j)_x \approx \frac{1}{h^2} [u_{i-1, j} - 2u_{i, j} + u_{i+1, j}]$$

$$u''(x_i, y_j)_y \approx \frac{1}{h^2} [u_{i, j-1} - 2u_{i, j} + u_{i, j+1}]$$

$$u''(x_i, y_j)_x + u''(x_i, y_j)_y \approx$$

$$\frac{1}{h^2} [\{u_{i-1, j} - 2u_{i, j} + u_{i+1, j}\} + \{u_{i, j-1} - 2u_{i, j} + u_{i, j+1}\}] =$$

$$\frac{1}{h^2} [u_{i-1, j} + u_{i, j-1} - 4u_{i, j} + u_{i+1, j} + u_{i, j+1}] = 0$$

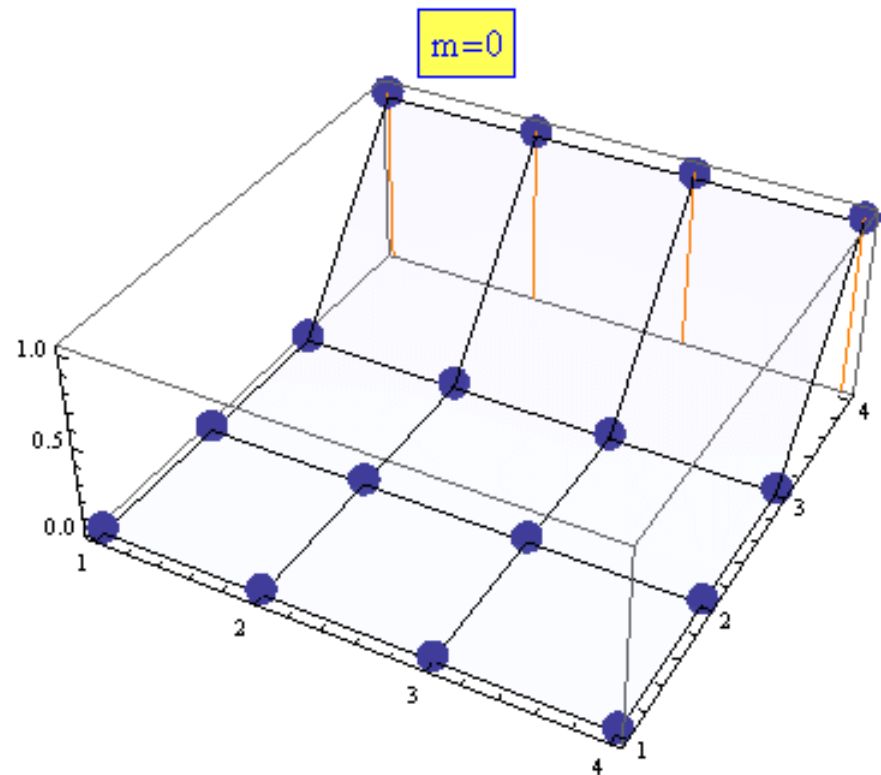
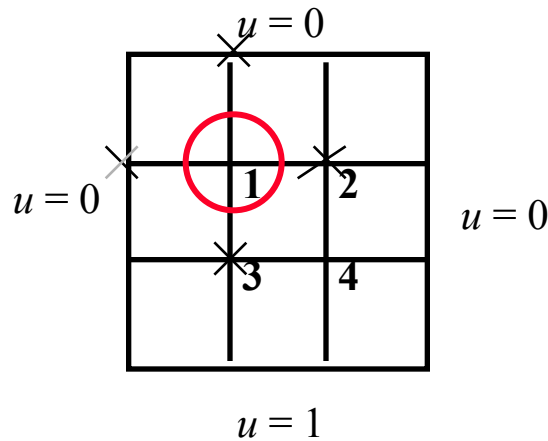


Sumując wyrazy wyznaczamy $u_{i,j}$:
$$u_{i,j} = \frac{1}{4} \{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}\}$$

Przykład: siatka 2x2

Przyjmujemy początkowe przybliżenie $u_1^1 = u_2^1 = u_3^1 = u_4^1 = 0$

Korzystamy z metody iteracyjnej Jacobiego (lub Gaussa-Seidla – szybsza zbieżność)



$$u_1^{m+1} = \frac{1}{4} (0 + u_2^m + u_3^m + 0)$$

$$u_2^{m+1} = \frac{1}{4} (0 + 0 + u_4^m + u_1^m)$$

$$u_3^{m+1} = \frac{1}{4} (u_1^m + u_4^m + 1 + 0)$$

$$u_4^{m+1} = \frac{1}{4} (u_2^m + 0 + 1 + u_3^m)$$

Korzystając z metod dokładnych (np. dekompozycja LU) musimy ułożyć macierz o rozmiarze liniowym $n \times n$.

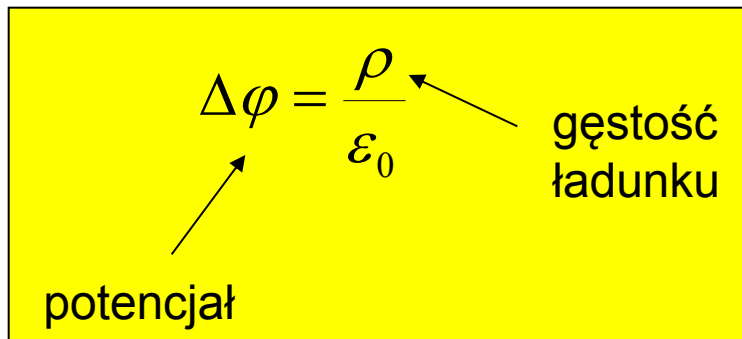
Wniosek: Musimy wprowadzić indeksowanie równań odpowiadających punktom dwuwymiarowej siatki $n \times n$:

$$(i, j) \rightarrow P \quad P = 1, 2, \dots, n^2$$

(na przykład wierszami)

$$P = (j-1) \cdot n + i$$

Przykład: równanie Poissona



A yellow rectangular box containing the equation $\Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. An arrow points from the text 'potencjał' (potential) to the symbol φ . Another arrow points from the text 'gęstość ładunku' (charge density) to the symbol ρ .

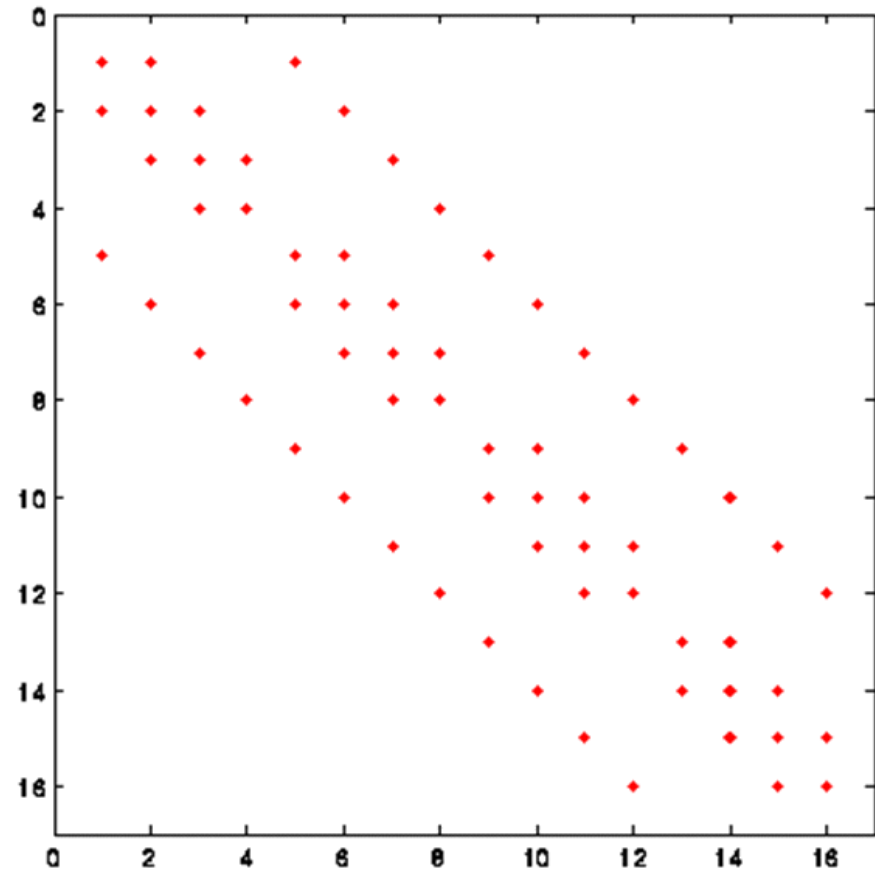
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y)$$

$$\frac{1}{h^2} [-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}] = f_{i,j}$$

$$\frac{1}{h^2} [-u_{P-1} - u_{P-n} + 4u_P - u_{P+1} - u_{P+n}] = f_P$$

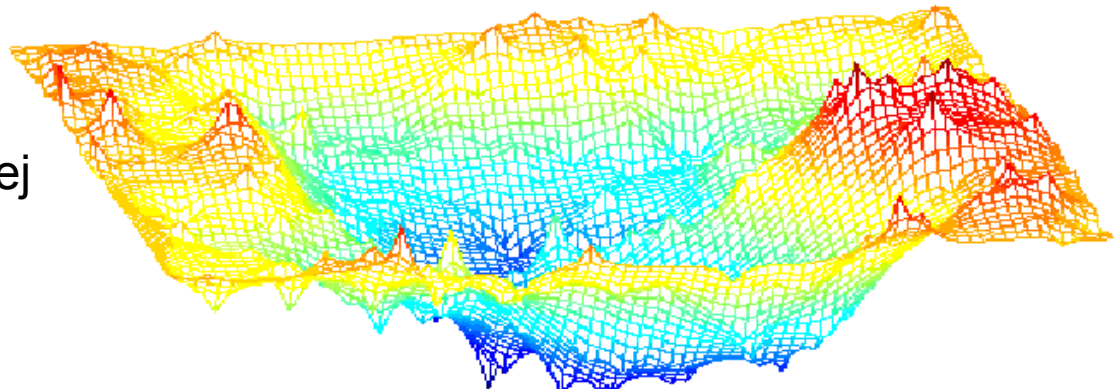
$$\frac{1}{h^2} [-u_{P-1} - u_{P-n} + 4u_P - u_{P+1} - u_{P+n}] = f_P$$

	4	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	-1	4	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	-1	4	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	-1	4	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	
	-1	0	0	0	4	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	
	0	-1	0	0	-1	4	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	
	0	0	-1	0	0	-1	4	-1	0	0	-1	0	0	0	0	
	0	0	0	-1	0	0	-1	4	0	0	0	-1	0	0	0	
	0	0	0	0	-1	0	0	0	4	-1	0	0	-1	0	0	
	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	4	-1	0	0	-1	0	
	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	4	-1	0	0	-1	
	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	4	-1	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	4	-1	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	4	-1	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	4	



Przykład:

Powierzchnia potencjału
przy losowo rozmieszczonej
gęstości ładunku



Paraboliczne i hiperboliczne RRC

Bezwymiarowe równanie przewodnictwa ciepła

$$\nabla^2 u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

$$u_{xx} = u_t$$

z warunkiem początkowym (dla $t = 0$)

$$u(x, 0) = g(x) \qquad 0 < x < L$$

gdzie $L = l$ – szerokość dziedziny rozwiązań.

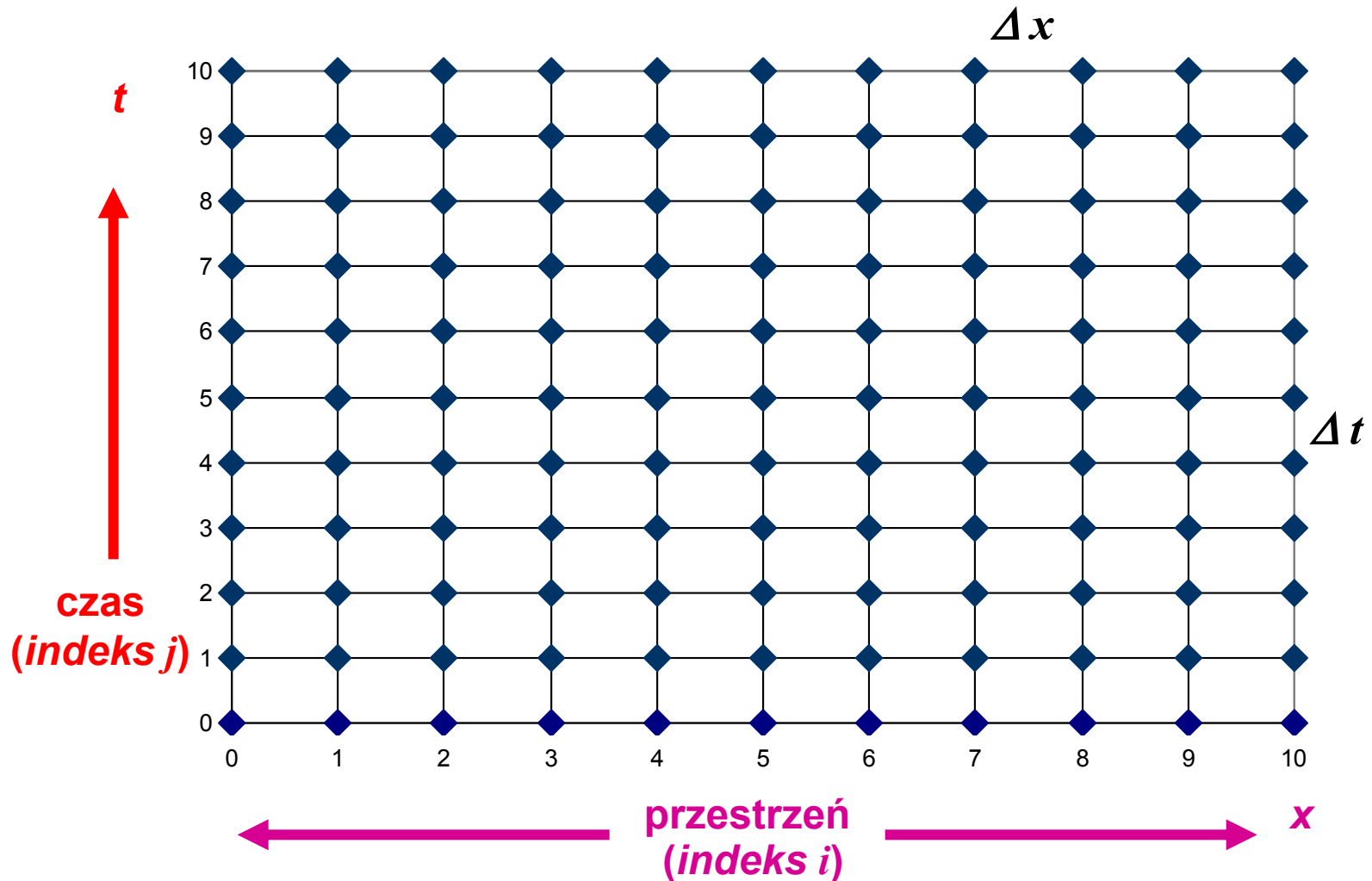
Warunki brzegowe:

$$u(0, t) = a(t) \qquad t \geq 0$$

$$u(L, t) = b(t) \qquad t \geq 0$$

gdzie $a(t)$ i $b(t)$ są funkcjami jedynie czasu, a $g(x)$ zależy jedynie od położenia x .

Dyskretyzacja przestrzeni rozwiązań



Położenie w węźle i w chwili j :

$$\begin{cases} t_j = j\Delta t & j \geq 0 \\ x_i = i\Delta x & 0 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

Zamieniając pochodne na różnice otrzymujemy

$$u_t \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t}$$

z błędem $O(\Delta t)$,

$$u_{xx} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x^2}$$

z błędem $O(\Delta x^2)$.

Dalej upraszczając

$$u_t \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

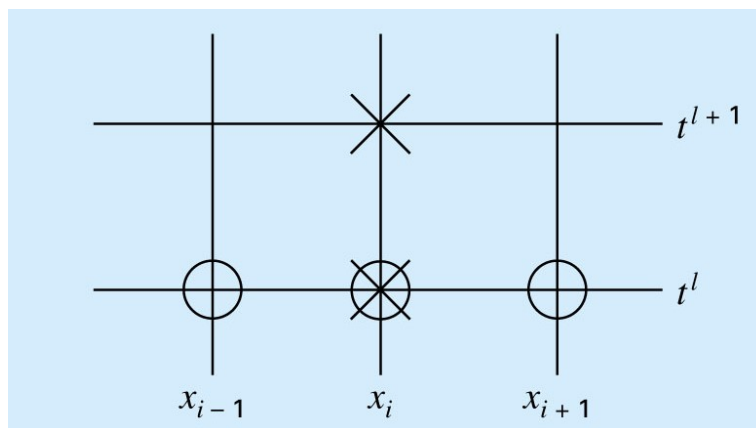
$$u_{xx} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

Zatem zdyskretyzowane równanie ma postać

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

Definiując $r = \Delta t / \Delta x^2$, otrzymujemy **schemat jawny Eulera**:

$$u_i^{j+1} = ru_{i-1}^j + (1 - 2r)u_i^j + ru_{i+1}^j$$



-  - punkt uwzględniany przy obliczaniu różnicy czasowej
-  - punkt uwzględniany przy obliczaniu różnicy przestrzennej

Algorytm schematu jawnego

```
// mamy n+1 węzłów przestrzennych siatki
// warunek brzegowy
u[0] = u[n] = 0.0;
// warunek początkowy
for (int i=1; i<n; i++)
{
    x = i*dx;
    u[i] = func(x);
};
// pętla czasowa
for (int t=1; t<=tsteps; t++)
    for (int i=1; i<n; i++)
        unew[i] = r*u[i-1] + (1-2*r)*u[i] + r*u[i+1];
u ← unew;
```

$$u_i^{j+1} = ru_{i-1}^j + (1-2r)u_i^j + ru_{i+1}^j$$

Problem: warunek stabilności schematu

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Czyli jeśli podzielimy domenę $[0,1]$ na sto podprzedziałów ($\Delta x = 0.01$), to $\Delta t \leq 5 \cdot 10^{-5}$.

Analiza stabilności

Rozważmy schemat jawny dla równania ciepła:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (1)$$

Zatem nasz schemat ma postać:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2)$$

Niech D będzie dokładnym rozwiązaniem równania (1).

Niech N będzie numerycznym rozwiązaniem równania (1).

Zatem błąd schematu

$$\varepsilon = N - D$$

Napiszmy równanie stabilności metody numerycznej, które opisz ewolucję błędu w trakcie obliczania kolejnych kroków czasowych.

$$\varepsilon \begin{cases} \text{rośnie} \Rightarrow \text{niestabilność} \\ \text{nie rośnie} \Rightarrow \text{stabilność} \end{cases}$$

Równanie stabilności będziemy badać za pomocą analizy Fouriera (metoda von Neumanna).

Rozwiązanie numeryczne możemy zapisać jako

$$N = D + \varepsilon \quad (3)$$

Podstawiając (3) do (1), otrzymujemy

$$\frac{D_j^{n+1} + \varepsilon_j^{n+1} - D_j^n - \varepsilon_j^n}{\Delta t} = \frac{D_{j+1}^n + \varepsilon_{j+1}^n - 2D_j^n - 2\varepsilon_j^n + D_{j-1}^n + \varepsilon_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n}{\Delta t} = \left[\frac{D_{j+1}^n - 2D_j^n + D_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + \left[\frac{\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right]$$

Ponieważ z równania (1)

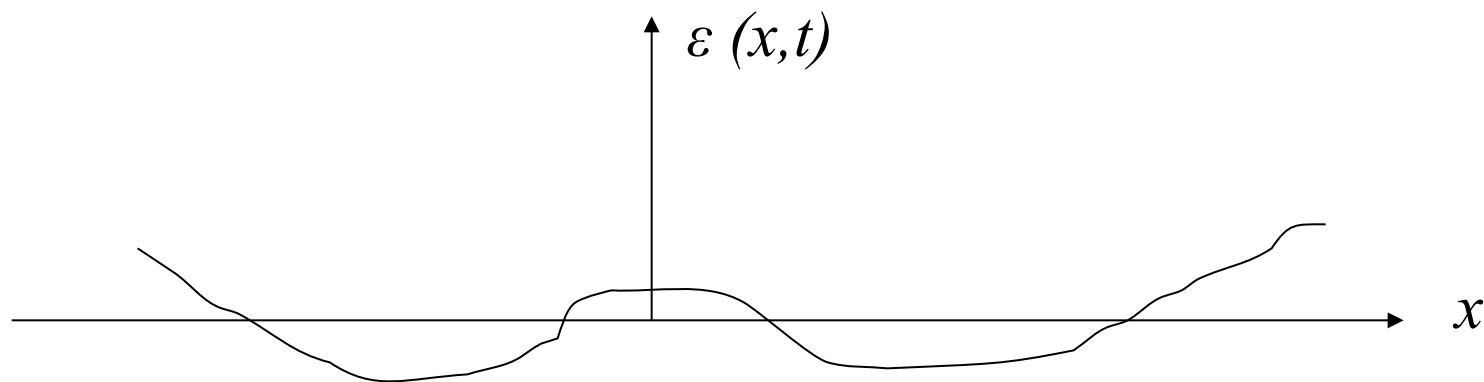
$$\frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\Delta t} = \left[\frac{D_{j+1}^n - 2D_j^n + D_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right]$$

Zatem

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n}{\Delta t} = \left[\frac{\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (4)$$

Czyli równanie na błąd jest takie same jak równanie na funkcję u .

Rozważmy rozkład błędu w pewnym kroku czasowym.



Błąd $\varepsilon(x, t)$ można zapisać w postaci szeregu Fouriera:

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m b_m(t) e^{ik_m x} \quad (5)$$

$$e^{ik_m x} = \cos k_m x + i \sin k_m x, \quad (k_m : \text{liczba falowa})$$

Ponieważ równanie różnicowe na błąd ε jest liniowe, zachowanie każdego wyrazu szeregu jest podobne do zachowania całego szeregu. Zatem wystarczy rozważyć wzrost błędu typowego wyrazu

$$\varepsilon(x, t) = b_m(t) e^{ik_m x} \quad (6)$$

Czasową zależność błędu uwzględnimy, przyjmując, że amplituda błędu b_m jest funkcją czasu. Ponieważ błąd rośnie lub maleje zwykle wykładniczo z czasem, możemy zapisać

$$\varepsilon(x, t) = e^{at} e^{ik_m x} \quad (7)$$

gdzie k_m jest rzeczywiste, ale a może być zespolone.

Podstawiając (7) do (4), otrzymujemy

$$e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x} = r \left(e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ik_m x} + e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)} \right) \quad (8)$$

$$\text{gdzie } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x} = r \left(e^{at} e^{ik_m (x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ik_m x} + e^{at} e^{ik_m (x-\Delta x)} \right) \quad (8)$$

Dzieląc (8) obustronnie przez $e^{at} e^{ik_m x}$

$$e^{a\Delta t} - 1 = r \left(e^{ik_m \Delta x} - 2 + e^{-ik_m \Delta x} \right) \quad (9)$$

Korzystając z zależności

$$\cos \beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}$$

otrzymujemy

$$e^{a\Delta t} = 1 + 2r(\cos \beta - 1)$$

gdzie

$$\beta = k_m \Delta x$$

Korzystając z zależności

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos \beta}{2}$$

otrzymujemy

$$e^{a\Delta t} = 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

Definiujemy współczynnik wzmocnienia błędu

$$G = \frac{\varepsilon_j^{n+1}}{\varepsilon_j^n}$$

Oczekujemy, by błąd nie narastał z kroku na krok

$$|G| \leq 1$$

Zatem

$$\left| \frac{\varepsilon_j^{n+1}}{\varepsilon_j^n} \right| \leq 1,$$

$$\varepsilon(x, t) = e^{at} e^{ik_m x}$$

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1}}{\varepsilon_j^n} = e^{a\Delta t}$$

$$\left| 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \right| \leq 1$$

$$\left| 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \right| \leq 1$$

$$-1 \leq 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \leq 1$$

$$(1), \quad 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \leq 1 \Rightarrow 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \geq 0 \Rightarrow r \geq 0$$

$$(2), \quad -1 \leq 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2} \Rightarrow r \sin^2 \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow r \leq \frac{1}{2}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$$

Warunek zbieżności
schematu jawnego (1)

Przypomnijmy sobie, że współczynnik wzmocnienia błędu

$$G = \frac{\varepsilon_j^{n+1}}{\varepsilon_j^n}$$

Czyli:

$$\begin{array}{lcl} \text{krok czasowy} & \varepsilon_j^{n+1} = G \varepsilon_j^n & \text{wykładnik potęgi} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \varepsilon_j^{n+1} = G^{n+1} \varepsilon_j^0 & \end{array}$$

Zwróćmy uwagę, że nasz schemat jawny (4)

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_j^n + \Delta t \left[\frac{\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] = \varepsilon_j^n + r [\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n]$$

możemy przedstawić w postaci równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} 1-2r & r & & \\ r & 1-2r & r & \\ & r & 1-2r & r \\ & & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^n \\ \varepsilon_2^n \\ \vdots \\ \varepsilon_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{n+1} \\ \varepsilon_2^{n+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_N^{n+1} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \varepsilon_1^n \\ \varepsilon_2^n \\ \vdots \\ \varepsilon_N^n \end{bmatrix}$$

Równanie własne z wartościami własnymi G

Zatem mamy układ równań iterowanych

$$\varepsilon_j^{n+1} = G\varepsilon_j^n$$

Przypomnienie z wykładu nr 3

Metoda Jacobiego

Jako rozwiązanie początkowe, biera się dowolny wektor (np. wektor zerowy) i oblicza się kolejne iteracje:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \beta + \alpha x^{(0)} \\ x^{(2)} &= \beta + \alpha x^{(1)} \\ x^{(k+1)} &= \beta + \alpha x^{(k)} \quad (*) \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i=1, 2, \dots, n$$

Kolejne przybliżenia $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ utworzą ciąg wektorów. Jeżeli istnieje granica tego ciągu, wtedy jest ona rozwiązaniem układu równań liniowych. Ciąg wektorów musi być zatem ciągiem zbieżnym.

Tw. Ciąg określony wzorem $(*)$ przy dowolnym wektorze $x^{(0)}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(\alpha) < 1$.

$\rho(\alpha)$ – promień spektralny macierzy $\alpha = \max |\lambda_i|$, λ_i – wartości własne macierzy α .

Twierdzenie powyższe mówi nam, że aby nasz schemat nie był rozbieżny, to wszystkie wartości własne G muszą leżeć na płaszczyźnie zespolonej (bo G mogą być zespolone) wewnątrz okręgu o promieniu 1.

W naszym przypadku wartości G były rzeczywiste, więc weźmy ciekawszy przypadek:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Zastosujmy schemat:

$$\frac{u_j^{p+1} - u_j^p}{\Delta t} - \frac{u_j^p - u_{j-1}^p}{\Delta x} = 0$$

↖
różnica zwykła

↖
różnica wsteczna

Zastępując $u \rightarrow \varepsilon$

$$\varepsilon_j^{p+1} = r(\varepsilon_j^p - \varepsilon_{j-1}^p) + \varepsilon_j^p$$

Pamiętając, że

$$\varepsilon_j^{n+1} = G^{n+1} \varepsilon_j^0$$

oraz, że

$$\varepsilon_j^0 = e^{ik_m x}$$

Uwaga: stabilność każdego problemu niehomogenicznego

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$$

badamy upraszczając równanie do postaci homogenicznej.

otrzymujemy

$$G^{p+1} e^{ik_m x} = r \left(G^p e^{ik_m x} - G^p e^{ik_m (x-\Delta x)} \right) + G^p e^{ik_m x}$$

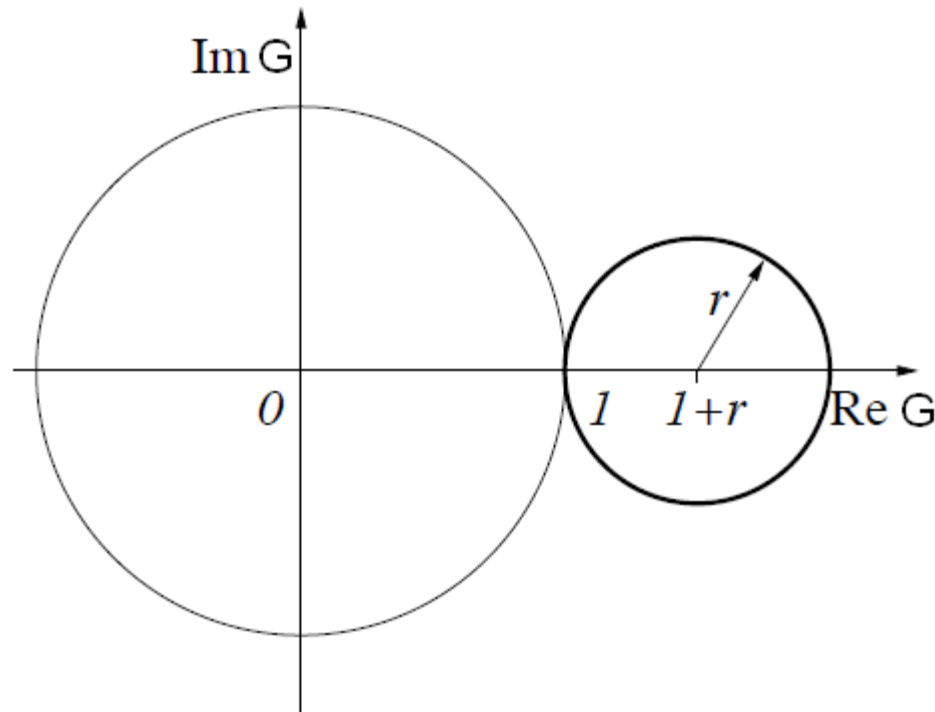
Dzieląc obustronnie przez $G^p e^{ik_m x}$

$$G = r(1 - e^{-ik_m \Delta x}) + 1 = 1 + r - r e^{-ik_m \Delta x} = 1 + r - r e^{-i\beta}$$

$$\varepsilon_j^{p+1} = r(\varepsilon_j^p - \varepsilon_{j-1}^p) + \varepsilon_j^p$$

$$\varepsilon_j^{n+1} = G^{n+1} \varepsilon_j^0$$

$$\varepsilon_j^0 = e^{ik_m x}$$



Wniosek: schemat jest niestabilny dla każdego r .

Życiowy przykład...

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{u_i^{t+1} - 2u_i^t + u_i^{t-1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t}{\Delta x^2}$$

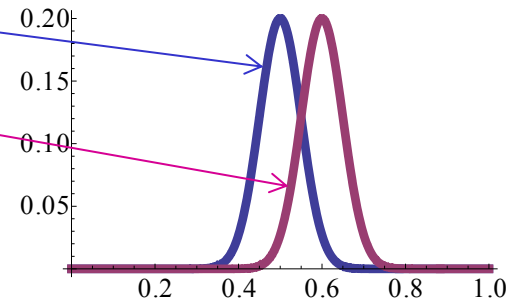
```
n=1000;  
dh=1.0/n;  
dt=1.0*dh;
```

```
for (x=0; x<=n; x++) {  
    X=(double) x/n;  
    u[x][0]=0.2*exp(-200*(X-0.5)*(X-0.5));  
    u[x][1]=0.2*exp(-200*(X-0.5-dt)*(X-0.5-dt));  
};
```

Jeden krok czasowy:

```
for (x=0; x<=n; x++) {  
    L=x-1;  
    P=x+1;  
    if (x==0) L=n;  
    if (x==n) P=0;  
    u[x][2]=(u[P][1]-2*u[x][1]+u[L][1])*dt*dt/dh/dh+2*u[x][1]-u[x][0];  
};  
for (x=0; x<=n; x++) {  
    u[x][0]=u[x][1];  
    u[x][1]=u[x][2];  
};
```

Warunki początkowe

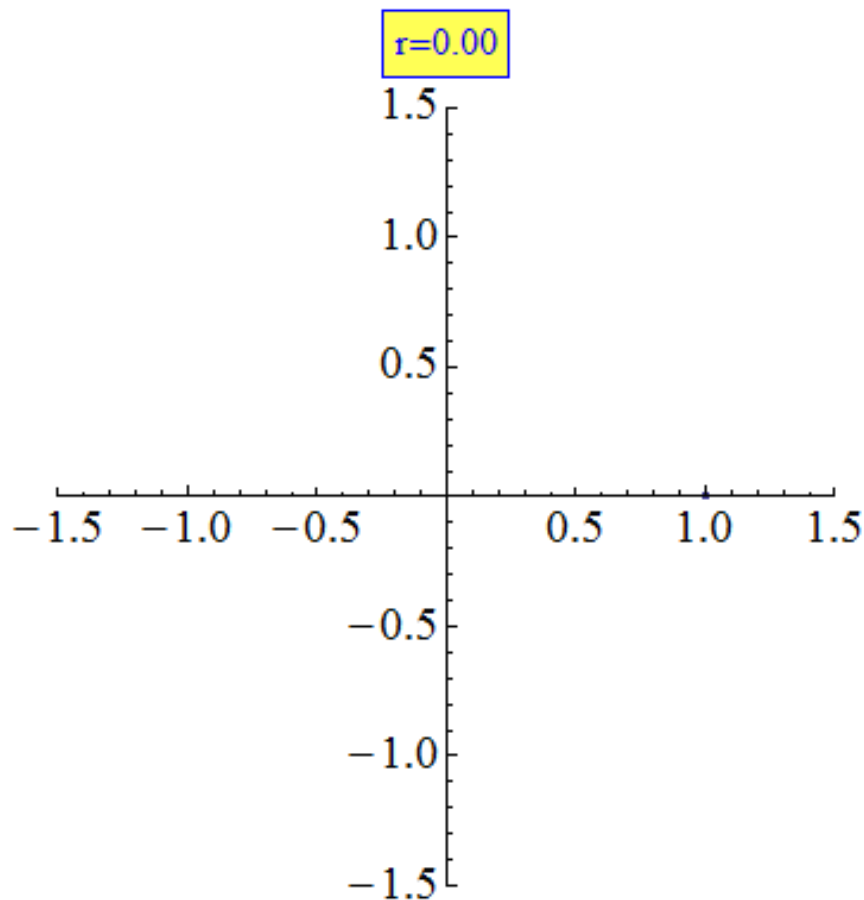


Warunki brzegowe (periodyczne)

Można obliczyć warunek stabilności dla podanego schematu, ale nie jest prosto...

$$G^2 - 2\left(1 - 2r^2 \sin^2(\beta/2)\right)G + 1 = 0$$

Czyli mamy równanie kwadratowe.



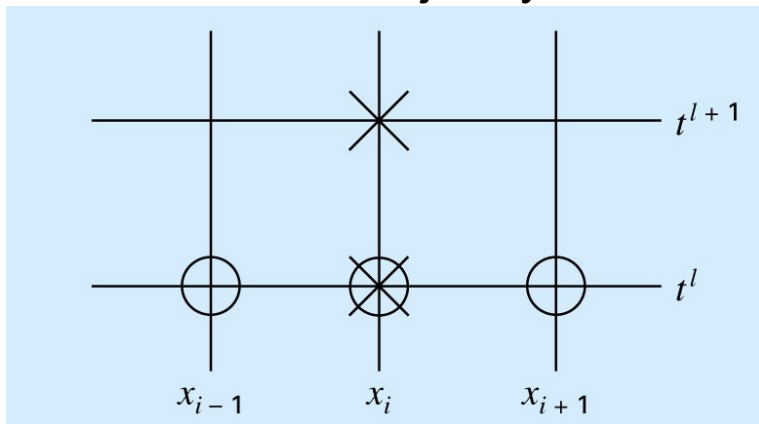
Schemat niejawny Eulera

Wróćmy do równania ciepła

Było:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

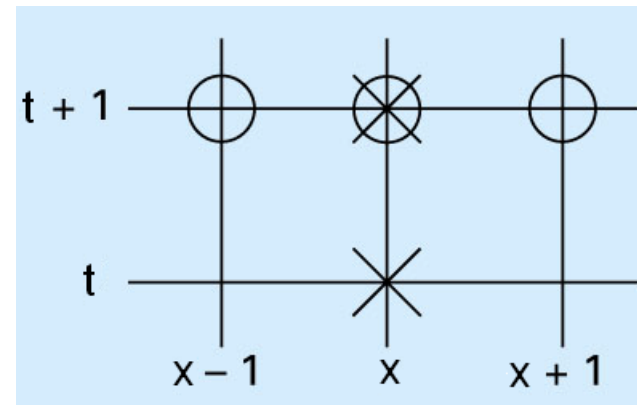
Schemat jawny



Teraz:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2}$$

Schemat niejawny



-  - punkt uwzględniany przy obliczaniu różnicy czasowej
-  - punkt uwzględniany przy obliczaniu różnicy przestrzennej

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2}$$

$$-ru_{i-1}^{j+1} + (1+2r)u_i^{j+1} - ru_{i+1}^{j+1} = u_i^j$$

Zatem mamy układ równań z macierzą trójdagonalną.

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & -r & 1+2r & -r & \\ & & \ddots & \ddots & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ u_3^{j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^j + ru_0^{j+1} \\ u_2^j \\ u_3^j \\ \vdots \\ u_{n-1}^j + ru_n^{j+1} \end{Bmatrix}$$

który musimy rozwiązać w każdym kroku czasowym.

Stabilność schematu niejawnego

Postępując analogicznie do poprzednich przypadków przyjmujemy po paru przekształceniach

$$G = \frac{1}{1 + 4r \sin^2(k_m \Delta x / 2)}$$

co daje ograniczenie na G :

$$\frac{1}{1 + 4r} \leq G \leq 1$$

co jest spełnione dla dowolnego r (oczywiście większego od zera).

Zatem schemat niejawny jest zawsze stabilny.

Schemat Cranka-Nicholsona

Możemy wyobrazić sobie bardziej ogólny schemat:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \theta \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + (1 - \theta) \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2}$$

gdzie $0 \leq \theta \leq 1$.

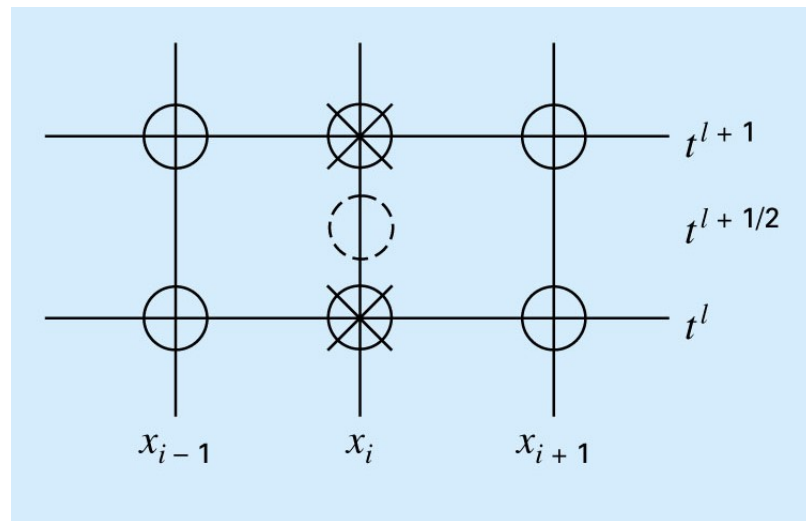
Przyjmijmy $\theta = 1/2$.

Pierwsza pochodna czasowa
jako różnica centralna w $t^{l+1/2}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_i^{l+1} - u_i^l}{\Delta t}$$

Druga pochodna przestrzenna
jako różnica centralna ważona

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i-1}^l - 2u_i^l + u_{i+1}^l}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i-1}^{l+1} - 2u_i^{l+1} + u_{i+1}^{l+1}}{(\Delta x)^2} \right]$$



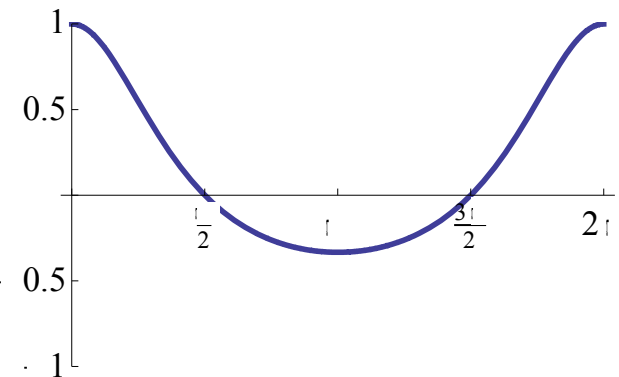
Po paru przekształceniach

$$-ru_{i-1}^{l+1} + 2(1+r)u_i^{l+1} - ru_{i+1}^{l+1} = ru_{i-1}^l + 2(1-r)u_i^l + ru_{i+1}^l$$

A zatem znowu mamy układ równań z macierzą trójdziagonalną.

Można pokazać, że układ jest zawsze stabilny.

$$G = \frac{1 - 2\sin^2(\beta/2)}{1 + 2\sin^2(\beta/2)}$$



Przewaga nad schematem niejawnym – błąd $O(\Delta t^2)$ zamiast $O(\Delta t)$.

Porównanie schematów:

<i>Scheme:</i>	<i>Truncation Error:</i>	<i>Stability requirements:</i>
Crank-Nicolson	$\mathcal{O}(\Delta x^2)$ and $\mathcal{O}(\Delta t^2)$	Stable for all Δt and Δx .
Backward Euler	$\mathcal{O}(\Delta x^2)$ and $\mathcal{O}(\Delta t)$	Stable for all Δt and Δx .
Forward Euler	$\mathcal{O}(\Delta x^2)$ and $\mathcal{O}(\Delta t)$	$\Delta t \leq \frac{1}{2}\Delta x^2$

$$x(t) = x_0 + \varepsilon(t)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$V(x) = V(x_0) + \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_0} \varepsilon + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x_0} \varepsilon^2$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -C\varepsilon$$

$$\varepsilon \sim e^{C't}$$

