

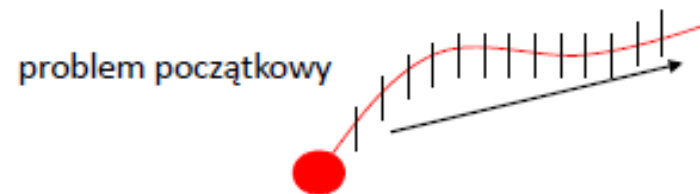
# Metody numeryczne

Wykład nr 9

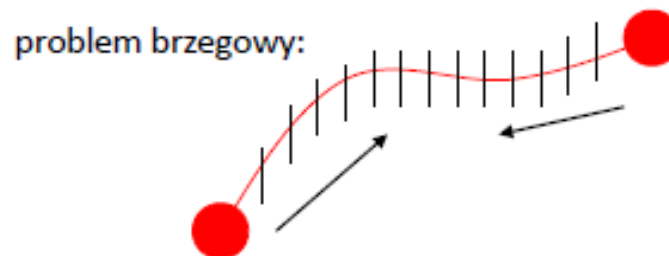
Dr Piotr Fronczak

## Równania różniczkowe zwyczajne - problemy brzegowe (BVP)

Dotychczas omawialiśmy problemy początkowe – równania różniczkowe, w których dane były wartości zmiennych zależnych (lub ich pochodne) dla pewnej szczególnej wartości zmiennej niezależnej.



Teraz naszym zadaniem będzie wyznaczenie spośród funkcji spełniających dane równanie różniczkowe zwyczajne, zdefiniowanych w rozważanym obszarze, tych, które spełniają dodatkowe warunki na brzegu tego obszaru. Warunki takie nazywane są warunkami brzegowymi i są nałożone na wartości funkcji i jej pochodnych w więcej niż jednym punkcie tego obszaru.



BVP są zwykle szczególnym przypadkiem równań różniczkowych cząstkowych, których rozwiązaniem są funkcje czasu i położenia, np. pole elektryczne, rozkład temperatury, prędkość przepływu itp.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{równanie dyfuzji}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{równanie falowe}$$

Jeśli  $y = y(x)$  (nie zależy od czasu – stany ustalone, równowagi), to otrzymujemy ogólną postać BVP (drugiego rzędu):

Dane jest równanie 
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$$

w dziedzinie 
$$a \leq x \leq b$$

oraz określone są w pewien sposób warunki brzegowe.

## Typowe formy warunków brzegowych

- Warunki brzegowe Dirichleta

Dwie wartości  $y(x)$  są dane – jedna dla  $x = a$ , druga dla  $x = b$ .

$$y(a) = Y_a \quad \text{oraz} \quad y(b) = Y_b$$

- Warunki brzegowe Neumanna

Dwie wartości  $dy/dx$  są dane – jedna dla  $x = a$ , druga dla  $x = b$ .

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = D_a \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=b} = D_b$$

- Mieszane warunki brzegowe Robina

$$c_1 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} + c_2 y(a) = C_a \quad \text{oraz} \quad c_3 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=b} + c_4 y(b) = C_b$$

$c_1, c_2, c_3, c_4$  - stałe

## Metoda strzałów

Rozpatrzmy ogólne równanie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k(x)y = F(x); a \leq x \leq b$$

W celu jego zdyskretyzowania przyjmijmy

$$h = (b - a) / N$$

gdzie  $N$  jest liczbą punktów, na które dzielimy przedział  $[a, b]$ .

Dyskretyzując drugą pochodną

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

otrzymujemy równanie

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + k_i y_i = F_i$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + k_i y_i = F_i$$

Chcemy scałkować to równanie od  $x_0 = a$  do  $x_N = b$ , więc przedstawmy je w postaci

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + 2y_i - h^2 k_i y_i + h^2 F_i$$

Czyli dla  $i = 1$

$$y_2 = -y_0 + 2y_1 - h^2 k_1 y_1 + h^2 F_1$$

Mamy dane  $y_0 = y(a) = 0$ , ale  $y_1$  jest nieznane.

Znajomość  $y_1$  jest równoznaczna ze znajomością  $y'$  dla  $x = 0$ :

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad \longrightarrow \quad y_1 \approx y_0 + h y'_0$$

Rozważmy równanie struny zaczeplonej na obu końcach.

Jedyną siłą działającą na element struny jest siła naprężenia  $T$ . Jej wartość w kierunku pionowym

$$F = T \sin(\theta + \Delta\theta) - T \sin(\theta) = T(\sin(\theta_{i+1}) - \sin(\theta_i))$$

Zakładając, że kąty  $\theta$  są małe

$$\sin(\theta_{i+1}) \approx \text{tg}(\theta_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

oraz, że przyspieszenie elementu struny jest proporcjonalne do wychylenia

$$a = -\omega^2 y$$

dostajemy

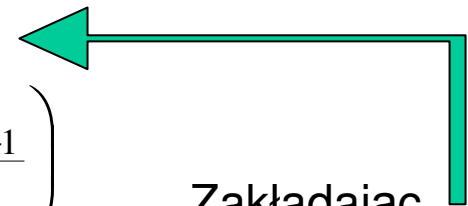
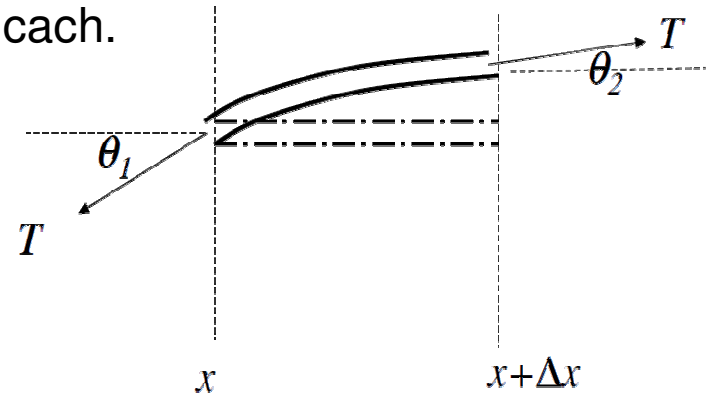
$$ma = \rho \Delta x \cdot (-\omega^2 y) \approx T \left( \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x} \right)$$

$$T \left( \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right) + \rho \omega^2 y = 0$$

Dla  $\Delta x \rightarrow 0$

$$Ty'' + \rho \omega^2 y = 0$$

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \lambda = \frac{\rho \omega^2}{T}$$



Zakładając

$$\text{że } a = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

otrzymalibyśmy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Gdy  $\lambda > 0$ , to istnieje rozwiązanie postaci

$$y = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$$

z wartościami własnymi

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Gdy  $\lambda = 0$

$$y = Ax + B$$

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymujemy rozwiązanie trywialne  $y = 0$ .

Ponieważ problem fizyczny nie ma ujemnych wartości własnych, nie musimy analizować przypadku  $\lambda < 0$ .



Zatem mamy rozwiązanie

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

równania

$$y'' + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} y = 0 \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Wybierzmy  $n = 4$  i  $L = 1$ .

$$y(x) = \sin(4\pi x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Pochodna wynosi

$$y'(x) = 4\pi \cos(4\pi x)$$

A kolejne kroki rozwiązania

$$y_1 = y_0 + 4\pi h \cos(4\pi x_0)$$

$$y_2 = -y_0 + 2y_1 - h^2 k_1 y_1 + h^2 F_1$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\parallel \text{O}} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\parallel \text{O}}$

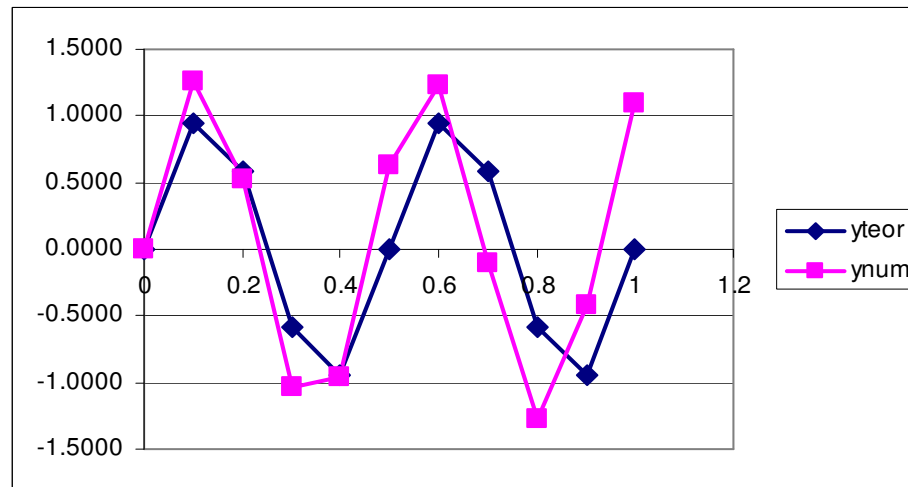
$$y_2 = 4\pi h(2 - 16h^2 \pi^2)$$

Oraz dalsze kroki zgodnie ze wzorem ze slajdu nr 6

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + 2y_i - h^2 k_i y_i + h^2 F_i$$

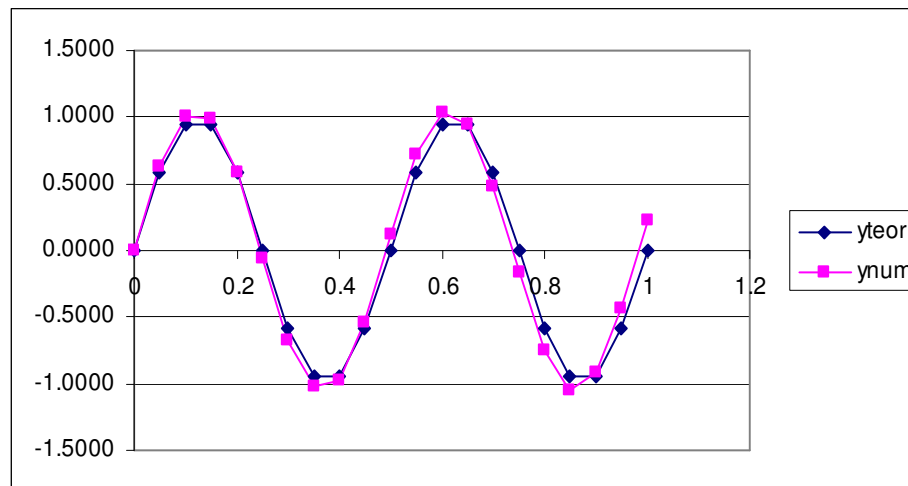
Podzielmy obszar rozwiązań  $[0,1]$  na 10 równych części ( $h = 0.1$ )

x	yteor	ynum
0	0.0000	0.0000
0.1	0.9511	1.2566
0.2	0.5878	0.5289
0.3	-0.5878	-1.0341
0.4	-0.9511	-0.9641
0.5	0.0000	0.6283
0.6	0.9511	1.2285
0.7	0.5878	-0.1113
0.8	-0.5878	-1.2753
0.9	-0.9511	-0.4255
1	0.0000	1.0963



Podzielmy obszar rozwiązań  $[0,1]$  na 20 równych części ( $h = 0.05$ )

x	yteor	ynum
0	0.0000	0.0000
0.05	0.5878	0.6283
0.1	0.9511	1.0086
0.15	0.9511	0.9907
0.2	0.5878	0.5817
0.25	0.0000	-0.0570
0.3	-0.5878	-0.6731
0.35	-0.9511	-1.0235
0.4	-0.9511	-0.9699
0.45	-0.5878	-0.5333
0.5	0.0000	0.1138
0.55	0.5878	0.7160
0.6	0.9511	1.0355
0.65	0.9511	0.9462
0.7	0.5878	0.4834
0.75	0.0000	-0.1703
0.8	-0.5878	-0.7567
0.85	-0.9511	-1.0444
0.9	-0.9511	-0.9198
0.95	-0.5878	-0.4321
1	0.0000	0.2262



Zwykle nie znamy wartości i wektorów własnych układu. Trzeba je zgadnąć.

Przekształćmy ogólny problem brzegowy drugiego rzędu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad \text{dla } a \leq x \leq b \quad \text{z } y(a) = Y_a, y(b) = Y_b$$

w układ dwóch równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = w \\ \frac{dw}{dx} = f(x, y, w) \end{cases} \quad \text{z war. pocz. } y(a) = Y_a$$

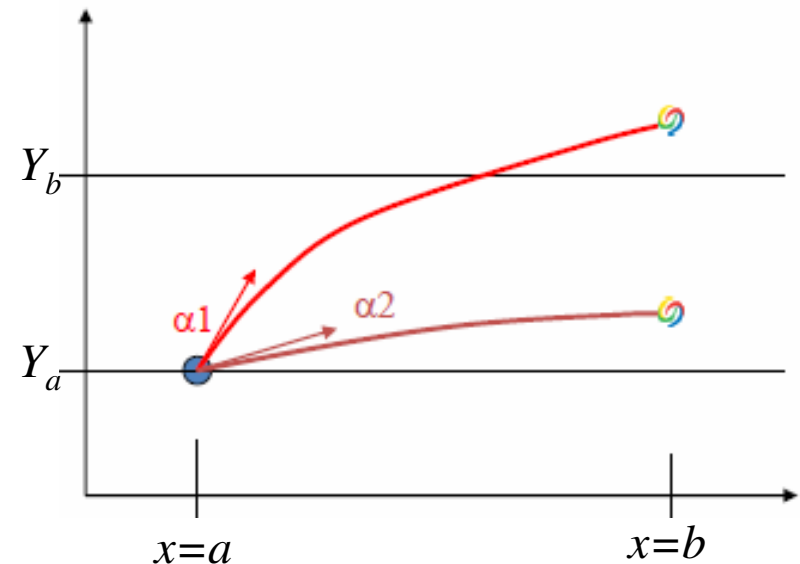
**BEZ WARUNKU POCZĄTKOWEGO**

Musimy znaleźć warunek początkowy

$$w(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \alpha$$

Innymi słowy – musimy znaleźć nachylenie  $\alpha_{OK}$  krzywej  $y$  w punkcie  $a$ .

$$\alpha_2 < \alpha_{OK} < \alpha_1$$



Wróćmy do naszego przykładu (dla  $n=4, L=1$ )

$$y'' + 16\pi^2 y = 0 \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Przepiszmy to równanie w postaci układu dwóch równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y' = w & y(0) = 0 \\ w' = -16\pi^2 y & w(0) = \alpha \end{cases}$$

**Problem początkowy!**

$\alpha$  - parametr układu.

Musimy znaleźć miejsce zerowe funkcji błędu

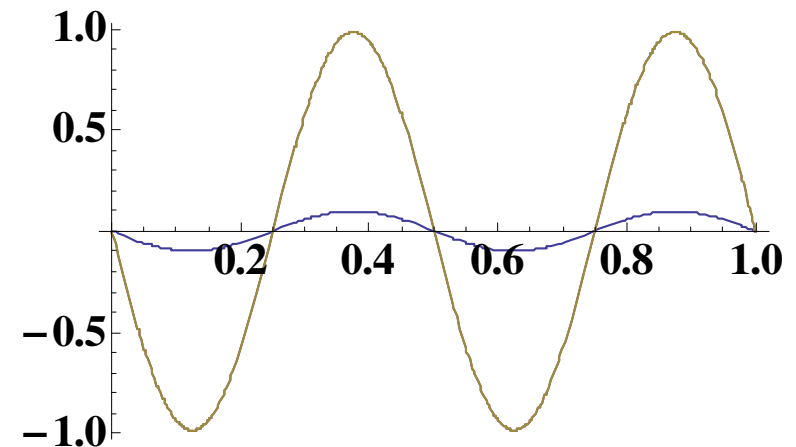
$$E(\alpha) = y(1)|_{\alpha} - y(1) = 0$$

Zwykle powyższy układ równań będziemy rozwiązywać jedną z metod podanych na poprzednim wykładzie (np. Rungego-Kutty), ale na razie, korzystając z metod analitycznych, zauważmy że

$$y(x) = C \frac{\sin(4\pi x)}{4\pi}$$

A zatem nie znajdziemy stałej  $C$  z warunku

$$y(1) = 0.$$



Wybierzmy zatem na potrzeby dydaktyki inny warunek brzegowy:

$$y(0.7) = 0.587$$

**Metoda bisekcji.**

$$\alpha_0 = -100$$

$$\alpha_1 = 100$$

$$\alpha_{\acute{s}r} = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1) = 0$$

$$E(\alpha_0) \cdot E(\alpha_{\acute{s}r}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_{\acute{s}r}$$

$$\alpha_{\acute{s}r} = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1) = -50$$

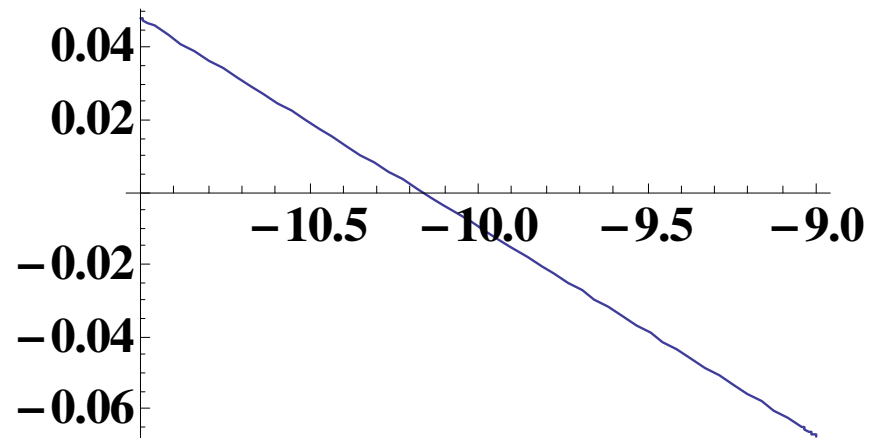
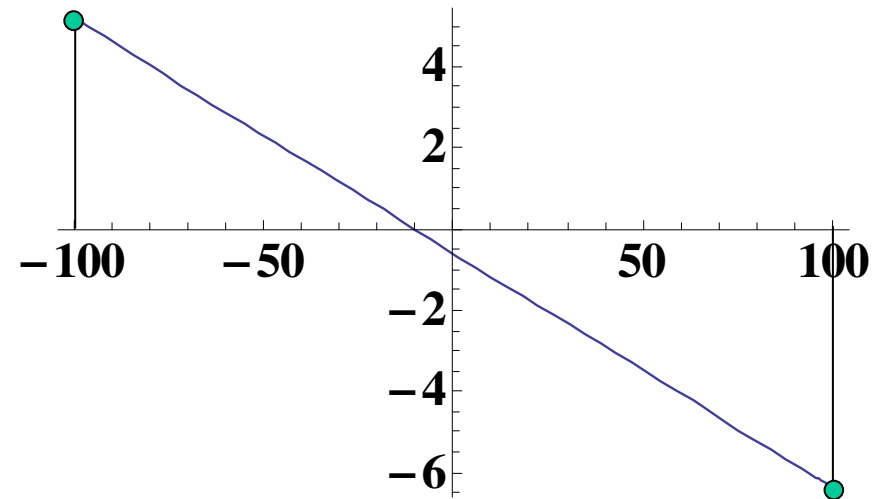
$$E(\alpha_0) \cdot E(\alpha_{\acute{s}r}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \alpha_{\acute{s}r}$$

■ ■ ■

$$\alpha_{\acute{s}r} = -10.2$$

Sprawdźmy:

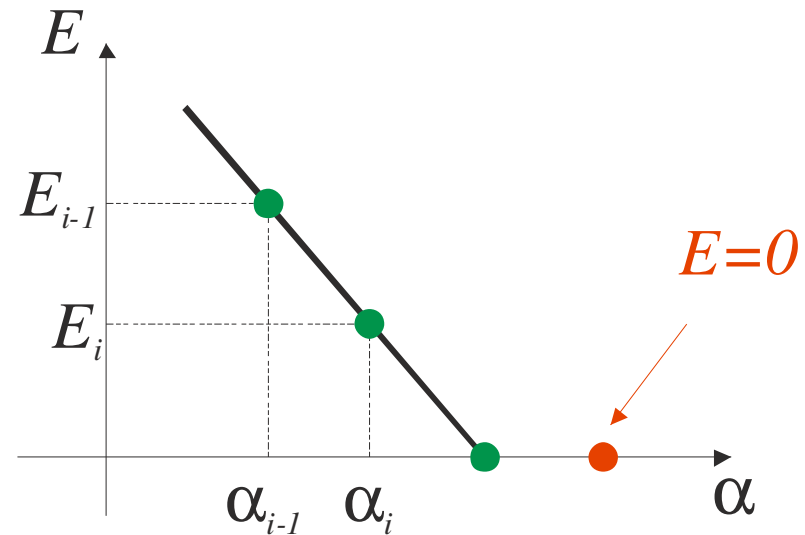
$$\sin(4\pi 0.7)' = 4\pi \cos(4\pi 0.7) = -10.17$$



## Metoda siecznych.

$$\frac{E_{i-1} - E_i}{\alpha_{i-1} - \alpha_i} = \frac{E_i - 0}{\alpha_i - \alpha_{i+1}}$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}{E_{i-1} - E_i} E_i$$



$$\alpha_{i-1} = -100 \quad E_{i-1} = 5.194$$

$$\alpha_i = 100 \quad E_i = -6.369$$

$$\alpha_{i+1} = 100 - \frac{(-100 - 100)}{5.194 + 6.369} (-6.369) = -10.16$$

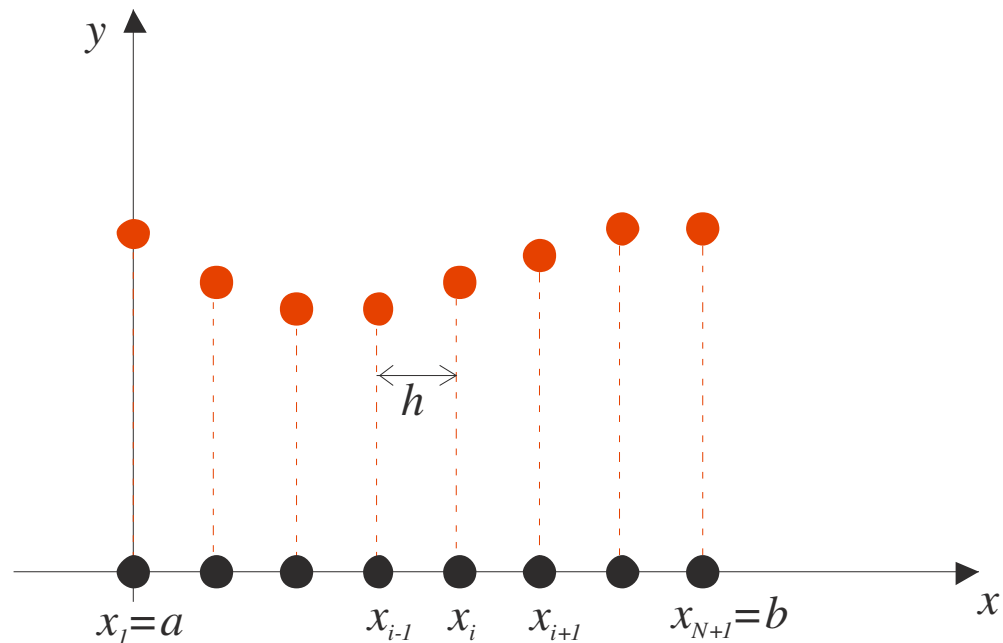
Przypomnienie:  $\sin(4\pi 0.7)' = 4\pi \cos(4\pi 0.7) = -10.17$

Wniosek: szybka zbieżność już po pierwszej iteracji.

## Metoda różnic skończonych

W metodzie tej, pochodne w równaniu różniczkowym zastępujemy różnicami skończonymi.

Dziedzinę rozwiązań  $[a, b]$  dzielimy na  $N$  przedziałów o długości  $h = (b-a) / N$ .



Mamy  $N+1$  punktów. Dla każdego z nich zapisujemy równanie różnicowe – czyli równanie algebraiczne.

Mamy zatem układ równań algebraicznych, który rozwiązujemy jedną z metod omówionych na wykładzie nr 3.

Przykład:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1, \quad y(0) = 0, y(1) = 0$$

Rozwiązanie analityczne:  $y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$

By otrzymać rozwiązanie numeryczne najpierw dyskretyzujemy równanie dla punktów  $[x_0, x_1, \dots, x_N]$ , gdzie  $x_0 = 0, x_N = 1, x_i = ih$ .

Wyberzmy  $h = 0.2$  ( $N = 5$ ).

Drugą pochodną można przybliżyć za pomocą *trójpunktowych różnic centralnych* (zwykle, choć niekoniecznie). Mamy zatem

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = 1, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4$$

Zwróćmy uwagę, że są to równania tylko dla punktów wewnętrznych.

Układ nasz ma 4 niewiadome i 4 równania:



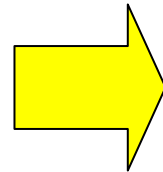
$$\begin{aligned}
 y_0 - 2y_1 + y_2 &= h^2, \\
 y_1 - 2y_2 + y_3 &= h^2, \\
 y_2 - 2y_3 + y_4 &= h^2, \\
 y_3 - 2y_4 + y_5 &= h^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 - y_0 \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

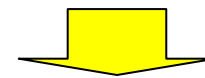
Macierz powyższa jest przykładem **macierzy trójdzielnej**.

Choć powyższy układ można rozwiązać jedną z metod omówionych na wykładzie 3 (np. metodą Gaussa), to szczególna postać tej macierzy pozwala zredukować liczbę obliczeń z  $n^3$  do  $n$ .

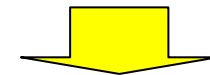
$$\begin{aligned} -2y_1 + y_2 &= \frac{4}{100}, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &= \frac{4}{100}, \\ y_2 - 2y_3 + y_4 &= \frac{4}{100}, \\ y_3 - 2y_4 &= \frac{4}{100}. \end{aligned}$$



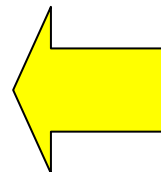
$$\begin{aligned} y_1 - \frac{1}{2}y_2 &= -\frac{2}{100}, \\ -\frac{3}{2}y_2 + y_3 &= \frac{6}{100}, \\ y_2 - 2y_3 + y_4 &= \frac{4}{100}, \\ y_3 - 2y_4 &= \frac{4}{100}. \end{aligned}$$



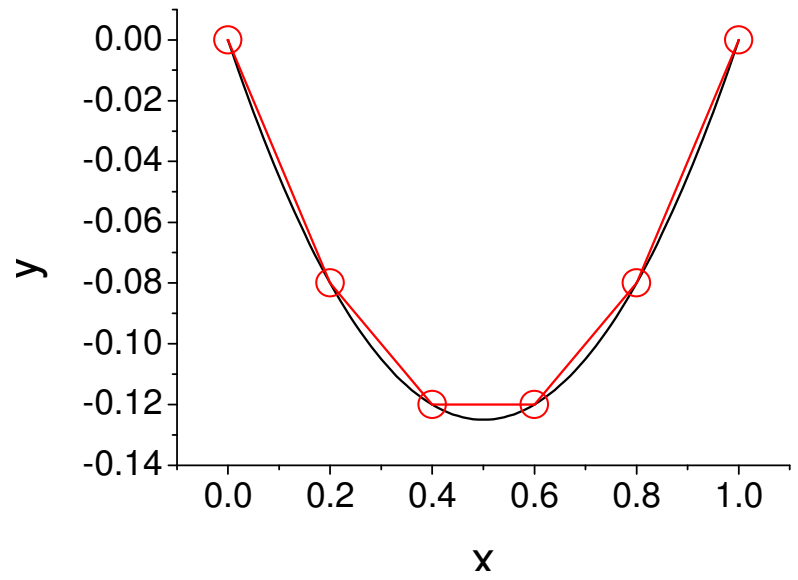
$$\begin{aligned} y_1 - \frac{1}{2}y_2 &= -\frac{2}{100}, \\ y_2 - \frac{2}{3}y_3 &= -\frac{4}{100}, \\ -\frac{4}{3}y_3 + y_4 &= \frac{8}{100}, \\ y_3 - 2y_4 &= \frac{4}{100}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y_1 - \frac{1}{2}y_2 &= -\frac{2}{100}, \\ y_2 - \frac{2}{3}y_3 &= -\frac{4}{100}, \\ y_3 - \frac{3}{4}y_4 &= -\frac{6}{100}, \\ -\frac{5}{4}y_4 &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y_4 &= -\frac{8}{100}, \\ y_3 &= -\frac{6}{100} + \frac{3}{4}\left(-\frac{8}{100}\right) = -\frac{12}{100}, \\ y_2 &= -\frac{4}{100} + \frac{2}{3}\left(-\frac{12}{100}\right) = -\frac{12}{100}, \\ y_1 &= -\frac{2}{100} + \frac{1}{2}\left(-\frac{12}{100}\right) = -\frac{8}{100}. \end{aligned}$$



## Algorytm Thomasa dla układów z macierzą trójdziagonalną

Dany jest układ równań:

$$a_i y_{i-1} + b_i + c_i y_{i+1} = Y_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

lub w postaci macierzowej  $a_1 = 0, c_n = 0$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Algorytm składa się z dwóch faz:

- Faza eliminacji wprzód – wykonując dla równań od  $i = 1$  do  $n$  eliminację niewiadomych uzyskujemy ostatecznie równanie ( $i = n$ ) z jedną tylko niewiadomą, którą możemy wyznaczyć.
- Faza eliminacji wstecz – korzystając z wyznaczonej w równaniu  $i+1$  niewiadomej  $y_{i+1}$  wyznaczamy z równania  $i$  niewiadomą  $y_i$ , aż do otrzymania wartości  $y_1$ .

A zatem szukamy schematu postaci:

$$y_{i-1} = \gamma_i y_i + \beta_i$$

Podstawiając ten schemat do równania (\*) otrzymujemy:

$$a_i(\gamma_i y_i + \beta_i) + b_i y_i + c_i y_{i+1} = Y_i$$

Wyznaczając  $y_i$

$$y_i = \frac{-c_i}{a_i \gamma_i + b_i} y_{i+1} + \frac{Y_i - a_i \beta_i}{a_i \gamma_i + b_i}$$

Porównując

z

otrzymujemy

$$\gamma_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i \gamma_i + b_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{Y_i - a_i \beta_i}{a_i \gamma_i + b_i}$$

Otrzymaliśmy równanie rekurencyjne na poszukiwane współczynniki  $\gamma$  i  $\beta$ .

Współczynniki początkowe  $\gamma_1$  i  $\beta_1$  nie mają znaczenia, bo mnożone są przez  $a_1=0$ .

Musimy jeszcze znać  $y_n$ , by móc rozpocząć iteracyjne obliczanie niewiadomych.

Podstawiając pierwsze równanie schematu

$$y_{n-1} = \gamma_n y_n + \beta_n \quad (**)$$

do równania (\*) otrzymujemy:

$$a_n (\gamma_n y_n + \beta_n) + b_n y_n = Y_n$$

Czyli

$$y_n = \frac{Y_n - a_n \beta_n}{a_n \gamma_n + b_n} \quad (***)$$

Warto zauważyć, że skoro  $\beta_{i+1} = \frac{Y_i - a_i \beta_i}{a_i \gamma_i + b_i}$  to wystarczy przyjąć

$y_{n+1} = 0$ , by móc bezpośrednio skorzystać ze wzoru (\*\*).

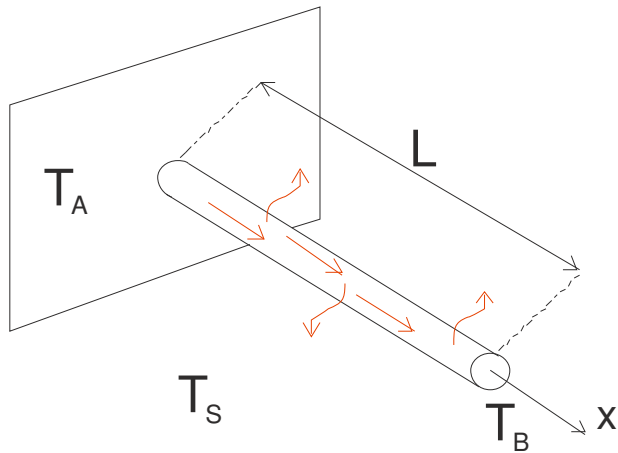
Podsumowując:

$$\begin{aligned} & \gamma_1 = \beta_1 = 0; \quad // \text{na przykład} \\ & \text{for } i=1..n \\ & \quad \gamma_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i \gamma_i + b_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{Y_i - a_i \beta_i}{a_i \gamma_i + b_i} \\ & Y_{n+1} = 0; \\ & \text{for } i=n+1..2 \\ & Y_{i-1} = \gamma_i x_i + \beta_i \end{aligned}$$

Algorytm Thomasa jest niezawodny, gdy macierz jest diagonalnie dominująca

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i| \quad i = 1, \dots, n$$

## Przykład: radiator prętowy



Równanie opisujące rozkład temperatury wzdłuż długości pręta:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h_c P}{k A_c} (T - T_s) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

$h_c$  – współczynnik wnikania ciepła

$P$  – obwód pręta

$k$  – współczynnik przewodzenia ciepła

$A_c$  – pole poprzecznego przekroju pręta

$$h_c = 40 \text{ W/m}^2/\text{K}$$

$$P = 0.016 \text{ m}$$

$$k = 240 \text{ W/m/K}$$

$$A_c = 1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$L = 0.1 \text{ m}$$

$$T(0) = 473 \text{ K}$$

$$T(L) = 293 \text{ K}$$

$$T_s = 293 \text{ K}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \beta(T - T_s) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} - \beta(T_i - T_s) = 0$$

$$T_{i-1} - (2 + h^2\beta)T_i + T_{i+1} = -h^2\beta T_s$$

Podzielmy domenę rozwiązań na 5 części ( $h = L/5 = 2 \text{ cm}$ )

$$i = 2 \quad T_1 - (2 + h^2\beta)T_2 + T_3 = -h^2\beta T_s$$

$$\text{czyli} \quad -(2 + h^2\beta)T_2 + T_3 = -(h^2\beta T_s + T_1)$$

$$i = 3 \quad T_2 - (2 + h^2\beta)T_3 + T_4 = -h^2\beta T_s$$

$$i = 4 \quad T_3 - (2 + h^2\beta)T_4 + T_5 = -h^2\beta T_s$$

$$i = 5 \quad T_4 - (2 + h^2\beta)T_5 + T_6 = -h^2\beta T_s$$

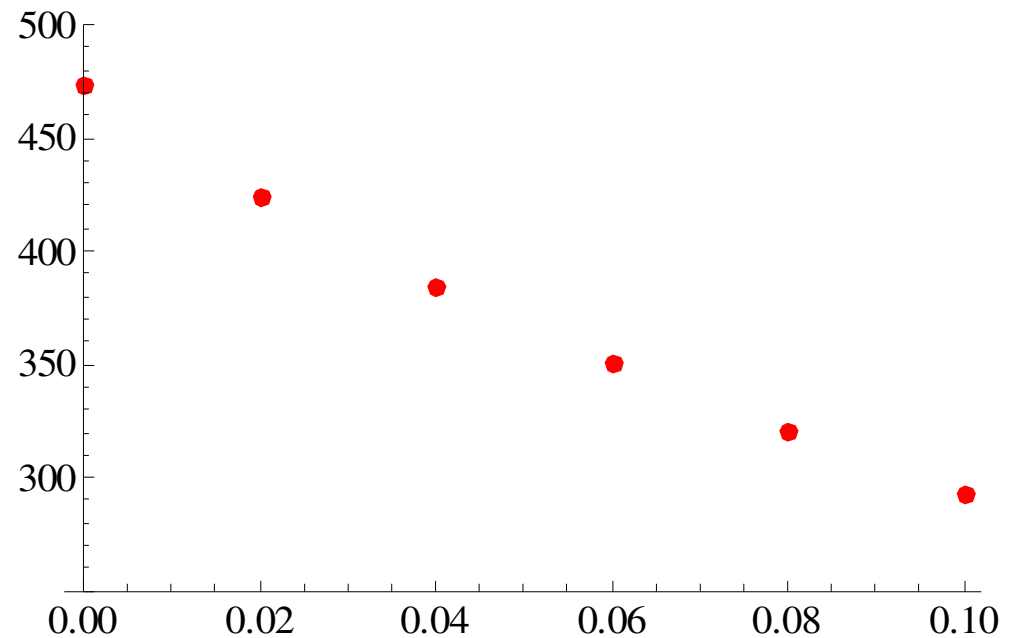
$$\text{czyli} \quad -(2 + h^2\beta)T_5 + T_6 = -(h^2\beta T_s + T_4)$$



Mamy zatem układ 4 równań z czterema niewiadomymi.

$$\begin{bmatrix} -(2+h^2\beta) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(2+h^2\beta) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -(2+h^2\beta) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -(2+h^2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(h^2\beta T_s + T_1) \\ -h^2\beta T_s \\ -h^2\beta T_s \\ -(h^2\beta T_s + T_6) \end{bmatrix}$$

Rozwiązując ten układ za pomocą algorytmu Thomasa otrzymujemy:



# Metoda różnic skończonych dla nieliniowych równań różniczkowych

Najciekawsze problemy współczesnej fizyki są nieliniowe.

Nieliniowe problemy brzegowe dyskretyzujemy w podobny sposób.

Wynikiem jest jednak układ nieliniowych równań algebraicznych.

Metody rozwiązywania takich równań nieliniowych omówiliśmy na wykładzie nr 2.

Najbardziej wydajne obliczeniowo są w tym przypadku metody iteracyjne.

Istnieje jednak potencjalny problem związany ze zbieżnością schematu iteracyjnego.

## **Metoda punktu stałego**

Układ równań nieliniowych można zapisać w postaci

$$[a][y] + [\Phi] = [b]$$

$[a]$  – macierz współczynników

$[\Phi]$  – wektor nieliniowych wyrażeń będących funkcją niewiadomych  $y_i$

$[b]$  - wektor znanych wielkości stałych

$$[a][y] + [\Phi] = [b]$$

Spośród wielu sposobów konstruowania procedury iteracyjnej wybierzmy najprostszy

$$[a][y]^{k+1} = [b] - [\Phi]^k$$



obliczone na podstawie  
wcześniejszego kroku k

Jeśli liczba punktów jest mała możemy macierz  $[a]$  odwrócić. Jeśli nie, możemy skorzystać z metody eliminacji Gaussa albo Thomasa (dla macierzy trójdzielnej)

$$[y]^{k+1} = [a]^{-1}([b] - [\Phi]^k)$$

## Przykład: radiator prętowy

Gdy uwzględnimy wyraz odpowiedzialny na wypromieniowywanie ciepła, równanie opisujące rozkład temperatury wzdłuż długości pręta uzyska postać:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h_c P}{kA_c} (T - T_S) - \frac{\varepsilon \sigma P}{kA_c} (T^4 - T_S^4) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

$\varepsilon$  - względna zdolność emisyjna

$\sigma$  - stała Stefana-Boltzmannna

Równanie zdyskretyzowane:

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} - \beta_A (T_i - T_S) - \beta_B (T_i^4 - T_S^4) = 0$$

$$T_{i-1} - (2 + h^2 \beta_A) T_i - h^2 \beta_B T_i^4 + T_{i+1} = -h^2 (\beta_A T_S + \beta_B T_S^4)$$

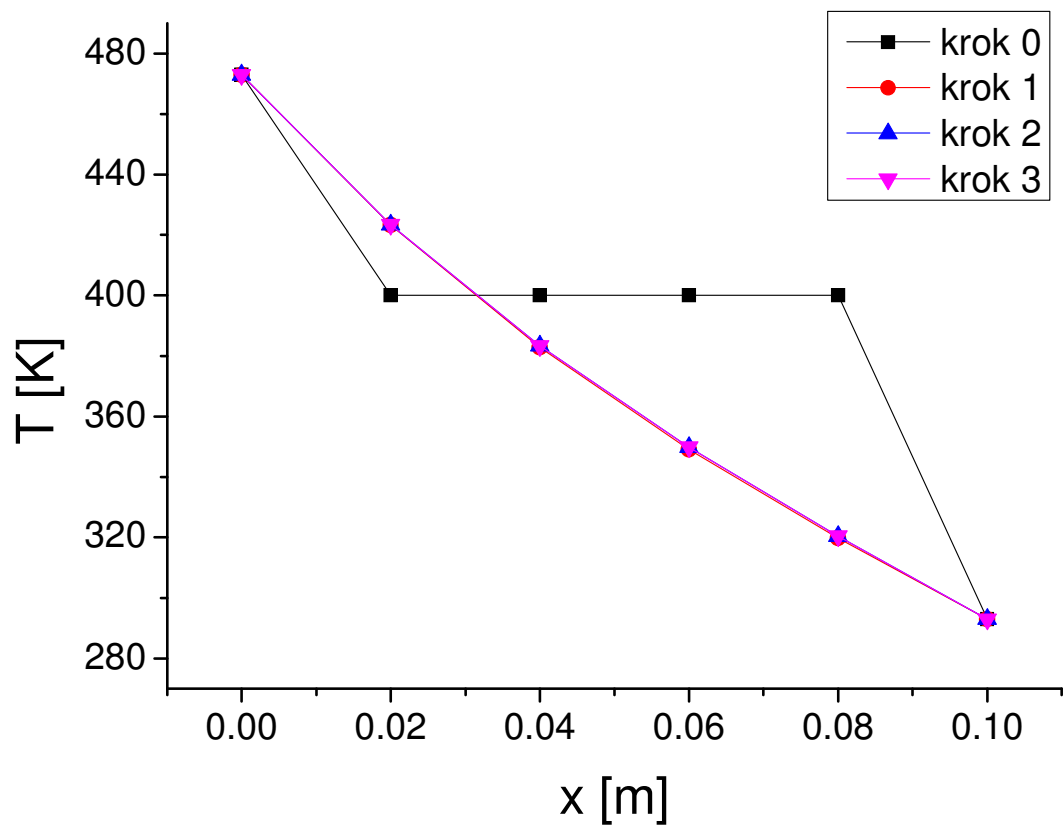
$$\begin{bmatrix} -(2+h^2\beta_A) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(2+h^2\beta_A) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -(2+h^2\beta_A) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -(2+h^2\beta_A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(h^2\beta_B T_2^4) \\ -(h^2\beta_B T_3^4) \\ -(h^2\beta_B T_4^4) \\ -(h^2\beta_B T_5^4) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -h^2(\beta_A T_S + \beta_B T_S^4) - T_1 \\ -h^2(\beta_A T_S + \beta_B T_S^4) \\ -h^2(\beta_A T_S + \beta_B T_S^4) \\ -h^2(\beta_A T_S + \beta_B T_S^4) - T_6 \end{bmatrix}$$

Teraz stosujemy procedurę iteracyjną:

$$[T]^{k+1} = [a]^{-1}([b] - [\Phi]^k)$$

	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
krok 0	473	400	400	400	400	293
krok 1	473	423.2293	382.8297	349.1078	319.8155	293
krok 2	473	423.3492	383.3225	349.8507	320.4519	293
krok 3	473	423.344	383.3132	349.8409	320.4456	293



## Dwuwymiarowe zagadnienie brzegowe

Równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- Zakładamy  $h_x = h_y = h$  [siatka kwadratowa]
- $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$
- $u(x_i+h, y_j+h) = u_{i+1,j+1}$ ,

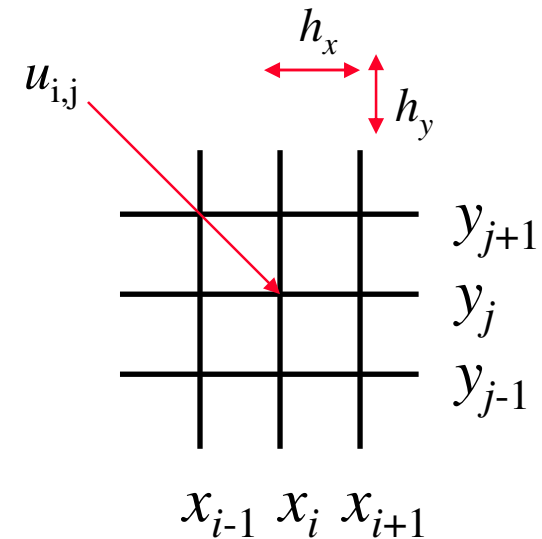
$$u''(x_i, y_j)_x \approx \frac{1}{h^2} [u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}]$$

$$u''(x_i, y_j)_y \approx \frac{1}{h^2} [u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}]$$

$$u''(x_i, y_j)_x + u''(x_i, y_j)_y \approx$$

$$\frac{1}{h^2} [\{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\} + \{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}\}] =$$

$$\frac{1}{h^2} [u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}] = 0$$

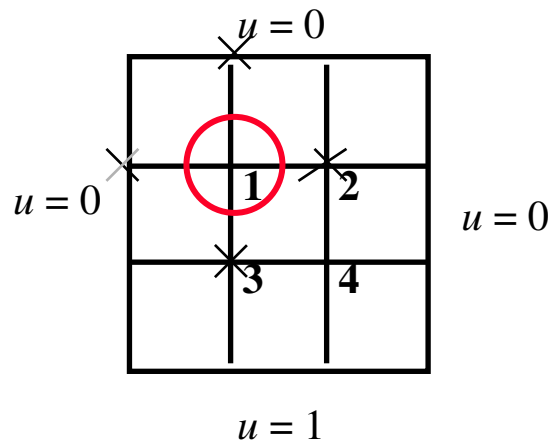


Sumując wyrazy wyznaczamy  $u_{i,j}$ : 
$$u_{i,j} = \frac{1}{4} \{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}\}$$

### Przykład: siatka 3x3

Przyjmujemy początkowe przybliżenie  $u_1^1 = u_2^1 = u_3^1 = u_4^1 = 0$

Korzystamy z metody iteracyjnej Jacobiego (lub Gaussa-Seidla – szybsza zbieżność)

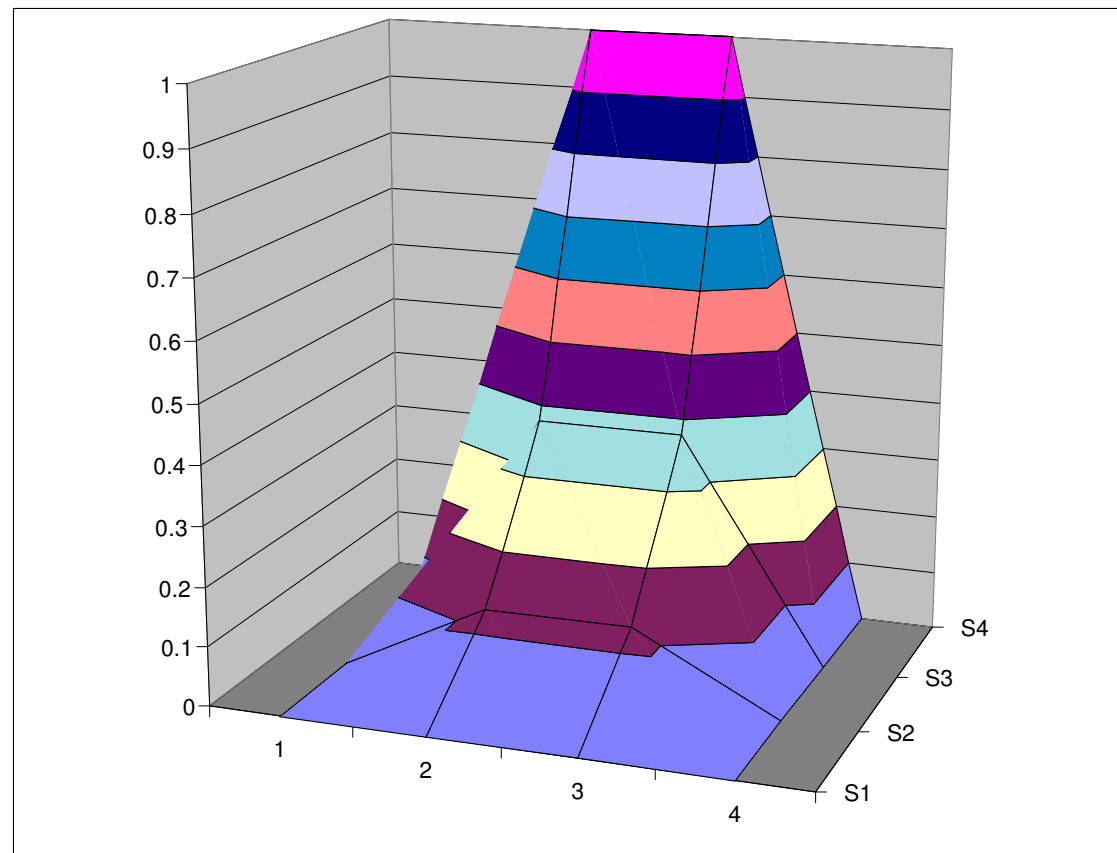


$$u_1^{m+1} = \frac{1}{4} (0 + u_2^m + u_3^m + 0)$$

$$u_2^{m+1} = \frac{1}{4} (0 + 0 + u_4^m + u_1^m)$$

$$u_3^{m+1} = \frac{1}{4} (u_1^m + u_4^m + 1 + 0)$$

$$u_4^{m+1} = \frac{1}{4} (u_2^m + 0 + 1 + u_3^m)$$





Korzystając z metod dokładnych (np. dekompozycja LU) musimy ułożyć macierz o rozmiarze liniowym  $n \times n$ .

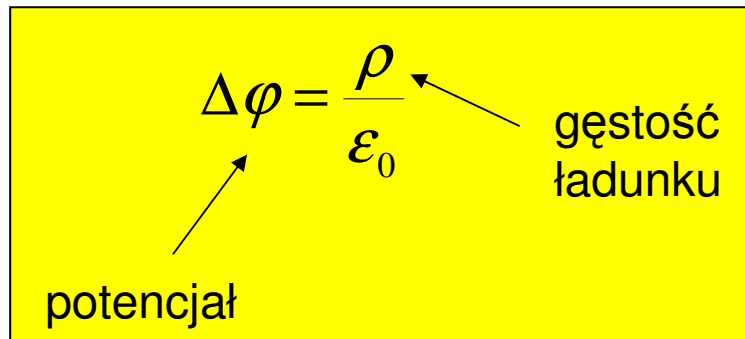
Wniosek: Musimy wprowadzić indeksowanie równań odpowiadających punktom dwuwymiarowej siatki  $n \times n$ :

$$(j, k) \rightarrow P \quad P = 1, 2, \dots, n^2$$

(na przykład wierszami)

$$P = (k - 1) \cdot n + j$$

Przykład: równanie Poissona



The diagram shows the Poisson equation  $\Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  on a yellow background. An arrow points from the text 'potencjał' to the symbol  $\varphi$ . Another arrow points from the text 'gęstość ładunku' to the symbol  $\rho$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y)$$

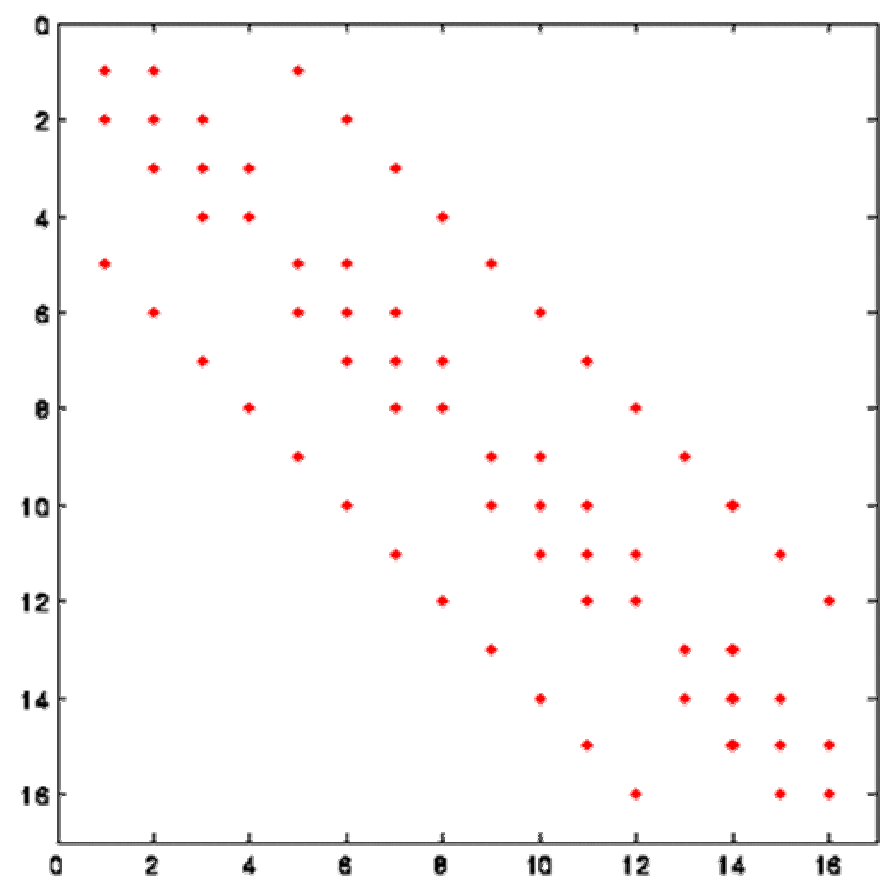
$$\frac{1}{h^2} [-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}] = f_{i,j}$$

$$\frac{1}{h^2} [-u_{P-1} - u_{P-n} + 4u_P - u_{P+1} - u_{P+n}] = f_P$$

```

| 4 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |
| -1 4 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |
| 0 -1 4 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |
| 0 0 -1 4 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 |
| -1 0 0 0 4 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 |
| 0 -1 0 0 -1 4 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 |
| 0 0 -1 0 0 -1 4 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0 |
| 0 0 0 -1 0 0 -1 4 0 0 0 -1 0 0 0 0 |
| 0 0 0 0 -1 0 0 0 4 -1 0 0 -1 0 0 0 |
| 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 4 -1 0 0 -1 0 0 |
| 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 4 -1 0 0 -1 0 |
| 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 4 0 0 0 -1 |
| 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 4 -1 0 0 |
| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 4 -1 0 |
| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 4 -1 |
| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 4 |

```



Przykład:

Powierzchnia potencjału  
przy losowo rozmieszczonej  
gęstości ładunku

