

Metody numeryczne

Wykład nr 7

Dr Piotr Fronczak

Równania różniczkowe zwyczajne

Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad y(x_1) = y_1$$

$f(x, y)$ – nachylenie krzywej $y(x)$ będące funkcją x i y .

Np. rozważmy następujące równanie:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -1.2y + 7e^{-0.3x}$$

Dla warunku początkowego

Numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego – zbiór punktów, które przybliżają funkcję $y(x)$.

Metoda Eulera

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

Całkę możemy policzyć jedną z metod omówionych na poprzednim wykładzie.
Najprostsza – metoda prostokątów:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

gdy $x_{i+1} - x_i$ stałe

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

To samo uzyskamy przybliżając pochodną za pomocą różnic zwykłych

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, y_i)$$

Przykład:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -1.2y + 7e^{-0.3x}$$

$$y = \frac{70}{9}e^{-0.3x} - \frac{43}{9}e^{-1.2x}$$

Przedział $0 \leq x \leq 2.5$

Warunek początkowy $y(0) = 3$.

Krok $h = 0.5$

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 3$$

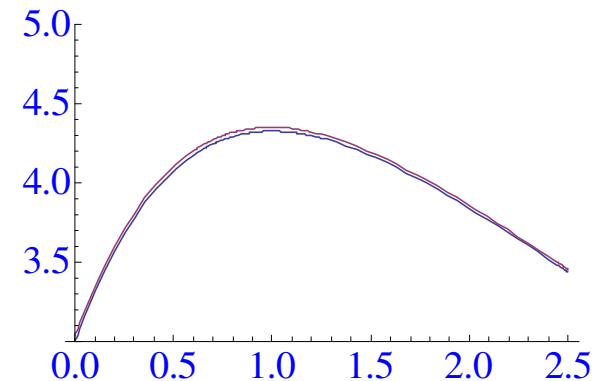
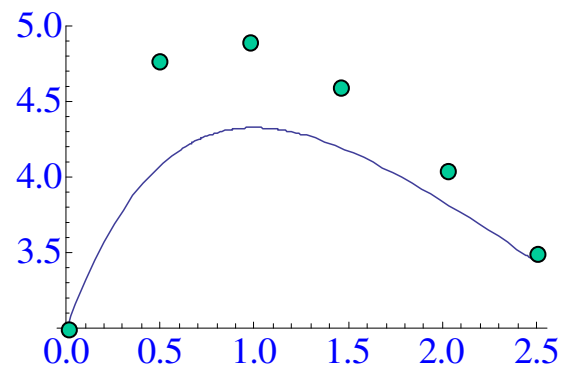
$$x_2 = x_1 + 0.5 = 0.5 \quad y_2 = y_1 + 0.5(-1.2y_1 + 7e^{-0.3x_1}) = 4.7$$

$$x_3 = x_2 + 0.5 = 1 \quad y_3 = y_2 + 0.5(-1.2y_2 + 7e^{-0.3x_2}) = 4.893$$

$$x_4 = x_3 + 0.5 = 1.5 \quad y_4 = y_3 + 0.5(-1.2y_3 + 7e^{-0.3x_3}) = 4.550$$

$$x_5 = x_4 + 0.5 = 2 \quad y_5 = y_4 + 0.5(-1.2y_4 + 7e^{-0.3x_4}) = 4.052$$

$$x_6 = x_5 + 0.5 = 2.5 \quad y_6 = y_5 + 0.5(-1.2y_5 + 7e^{-0.3x_5}) = 3.542$$



Analiza błędów

Błędy zaokrągleń Wynikają z arytmetyki zmiennoprzecinkowej w komputerze

Błędy obcięcia Wynikają z przyjętego przybliżenia metody rozwiązywania równań.

Dwa rodzaje:

Błąd lokalny – związany w pojedynczym krokiem metody

Błąd akumulowany – związany z nawarstwianiem się błędów z poprzednich kroków.

Razem dają one całkowity błąd obcięcia.

Lokalny błąd obcięcia

Dokładne rozwiązanie w kroku i dane jest przez rozwinięcie w szereg Taylora:

$$y_{i+1}^{Taylor} = y_i^{NS} + hf(x_i, y_i^{NS}) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=\xi_i}$$

(NS –rozwiązanie numeryczne)

gdzie

$$f(x_i, y_i^{NS}) = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i}$$

ξ_i jest liczbą między x_i i x_{i+1} .

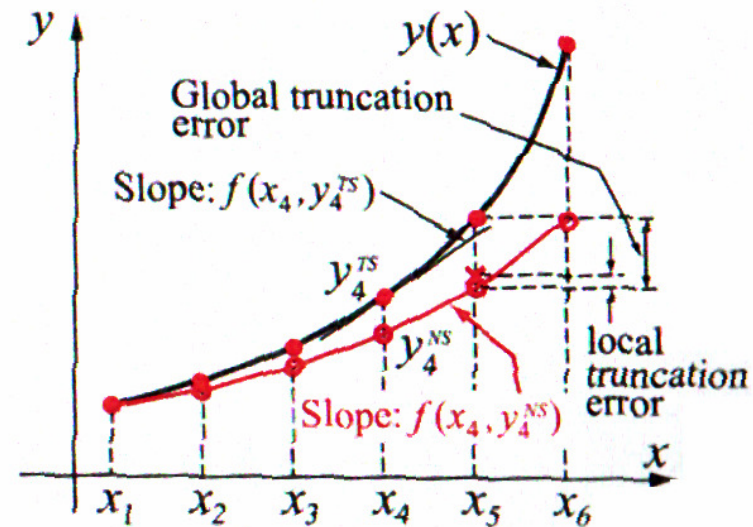
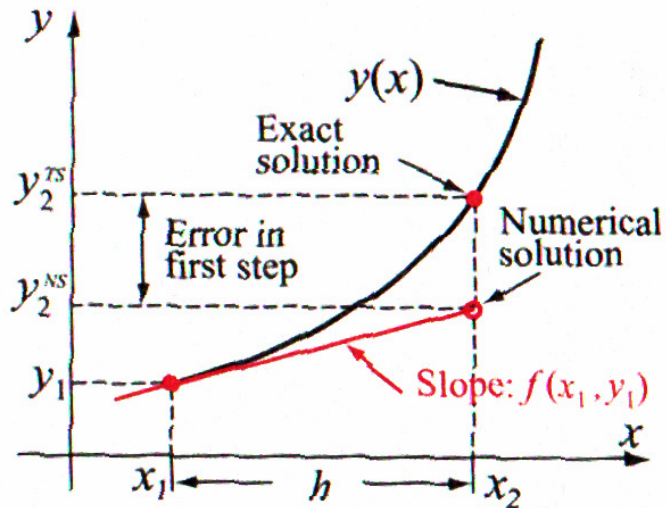
Porównując z metodą Eulera

$$y_{i+1}^{NS} = y_i^{NS} + hf(x_i, y_i^{NS}) \quad (*)$$

Dostajemy lokalny błąd obcięcia

$$e_i^{TR} = y_{i+1}^{Taylor} - y_{i+1}^{NS} = \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=\xi_i} = O(h^2)$$

Akumulowany błąd obcięcia



Całkowity błąd obcięcia w punkcie x_i :

$$E_i^{TR} = y_i^{TS} - y_i^{NS}$$

Całkowity błąd obcięcia w punkcie x_{i+1} :

$$E_{i+1}^{TR} = y_{i+1}^{TS} - y_{i+1}^{NS}$$

Prawdziwa wartość y_{i+1}^{TS} może być wyrażona przez rozwinięcie w szereg Taylora:

$$y_{i+1}^{TS} = y_i^{TS} + hf(x_i, y_i^{TS}) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=\eta_i} \quad (**)$$

Odejmując (**) od (*) otrzymujemy

$$E_{i+1}^{TR} = E_i^{TR} + h \left[f(x_i, y_i^{TS}) - f(x_i, y_i^{NS}) \right] + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=\eta_i}$$

Twierdzenie o wartości średniej

Jeżeli $f(x)$ jest ciągła na zamkniętym przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) , to istnieje takie c w tym przedziale, że

$$f'(c) = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=c} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Zatem

$$\left[f(x_i, y_i^{TS}) - f(x_i, y_i^{NS}) \right] = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{y=\gamma_i \\ x=x_i}} (y_i^{TS} - y_i^{NS}) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{y=\gamma_i \\ x=x_i}} E_i^{TR}$$

gdzie γ_i jest wartością y między y_i^{TS} a y_i^{NS}

$$E_{i+1}^{TR} = E_i^{TR} \left[1 + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{y=\gamma_i \\ x=x_i}} \right] + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=\eta_i}$$

$$E_{i+1}^{TR} = E_i^{TR} \left[1 + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{y=\gamma_i \\ x=x_i}} \right] + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=\eta_i}$$

$\leq C$
 $\leq M$

Czyli górne oszacowanie błędu:

$$E_{i+1}^{TR} \leq E_i^{TR} [1 + hC] + Mh^2$$

Teraz zobaczmy, jak błąd obcięcia akumuluje się w kolejnych krokach.

$$E_1^{TR} = 0, \quad \text{bo} \quad y_1^{TS} = y_1^{NS}$$

$$E_2^{TR} \leq Mh^2$$

$$E_3^{TR} \leq E_2^{TR} [1 + hC] + Mh^2 = Mh^2 [1 + hC] + Mh^2 = Mh^2 \{[1 + hC] + 1\}$$

$$E_4^{TR} \leq Mh^2 \{[1 + hC]^2 + [1 + hC] + 1\}$$

Niech $z = [1 + hC]$

$$1 + z + z^2 + z^m = \frac{z^{m+1} - 1}{z - 1}$$

$$E_i^{TR} \leq Mh^2 \left\{ \frac{[1+hC]^{i-1} - 1}{hC} \right\} = \frac{hM}{C} \{[1+hC]^{i-1} - 1\}$$

Z równania tego trudno wciąż oszacować rząd wielkości błędu. Zwróćmy jednak uwagę, że

$$e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3!} + \dots$$

$$e^{hC} = 1 + hC + \frac{(hC)^2}{2} + \frac{(hC)^3}{3!} + \dots$$

$$1 + hC \leq e^{hC}$$

$$[1 + hC]^{i-1} \leq e^{hC(i-1)}$$

$$E_i^{TR} \leq \frac{hM}{C} \{e^{hC(i-1)} - 1\}$$

Po N krokach całkowity błąd obcięcia wyniesie

$$E_{N+1}^{TR} \leq \frac{hM}{C} \{e^{hCN} - 1\} = \frac{hM}{C} \{e^{C(x_{N+1} - x_1)} - 1\} \quad \text{bo} \quad N = \frac{x_{N+1} - x_1}{h}$$

Czyli $E_{N+1}^{TR} \leq O(h)$ choć $e_i^{TR} = O(h^2)$

Niejawna metoda Eulera

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Równanie to jest w ogólności nieliniowe i musi być rozwiązane jedną z metod omówionych na wykładzie nr 2.

Rząd błędu jest taki sam jak w zwykłej metodzie Eulera.

Zmodyfikowana metoda Eulera

Założenie, że nachylenie między punktami x_i i x_{i+1} jest stałe było głównym źródłem błędów w metodzie Eulera.

Nachylenie w metodzie zmodyfikowanej jest średnią nachylenia na początku przedziału i oszacowania nachylenia na końcu przedziału.

Nachylenie na początku przedziału: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i)$

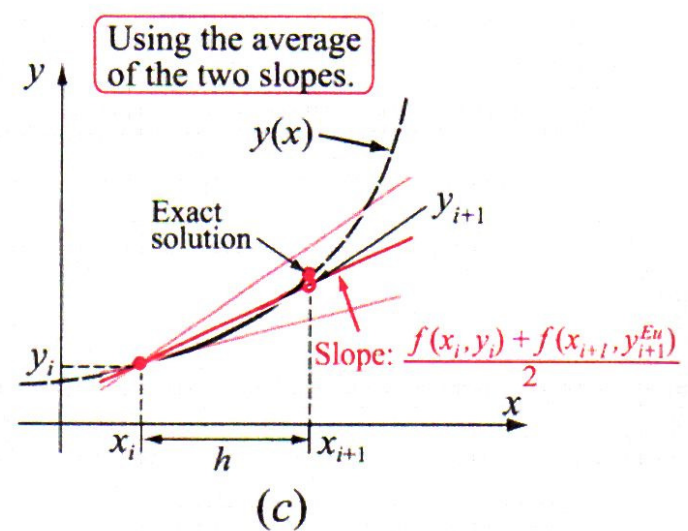
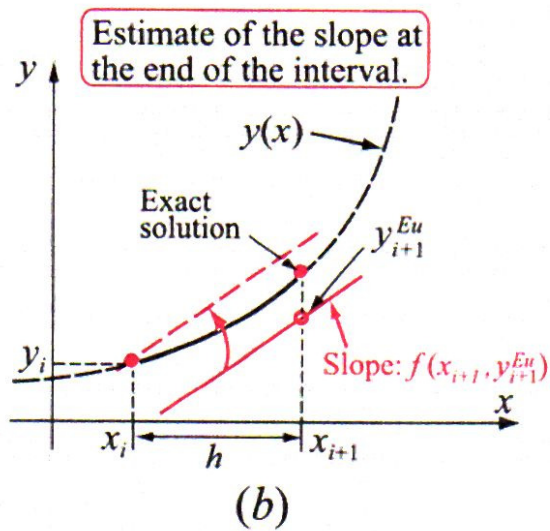
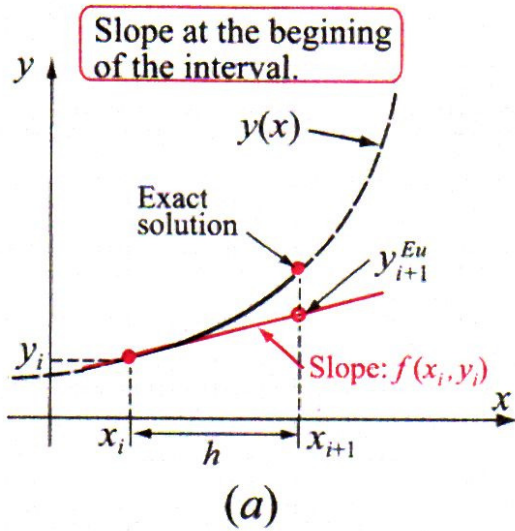
By oszacować nachylenie na końcu przedziału najpierw trzeba oszacować y_{i+1} :

$$y_{i+1}^{Eu} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad y^{Eu} \text{ liczone zwykłą metodą Eulera}$$

Wreszcie szacujemy nachylenie

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{y=y_{i+1}^{Eu} \\ x=x_{i+1}}} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{Eu})$$

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{Eu})}{2}$$



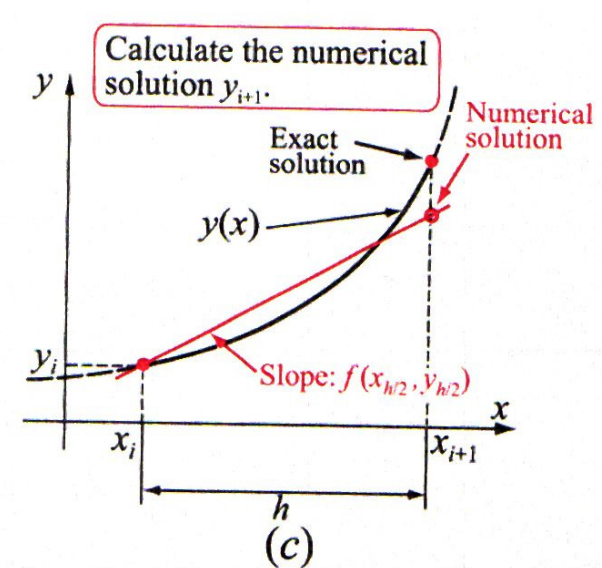
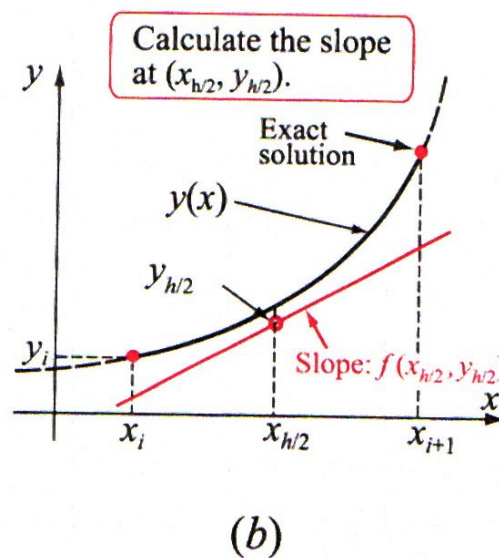
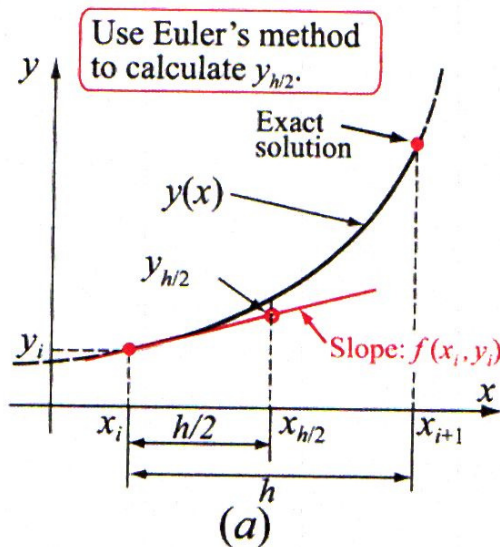
Zmodyfikowana metoda Eulera (MidPoint).

W metodzie tej nachylenie jest szacowane na podstawie wartości y w środku przedziału.

$$y_m = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \quad y_m \text{ liczone zwykłą metodą Eulera}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_m} = f(x_m, y_m)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_m, y_m)$$



Metody Rungego-Kutty

W metodach tych nachylenie szacowane jest na podstawie kilku punktów wewnątrz przedziału. Różne metody RK klasyfikowane są ze względu na ich rząd (odpowiadający liczbie punktów wziętych do szacowania nachylenia)

Np. metoda RK drugiego rzędu ma lokalny błąd obcięcia $O(h^3)$ i akumulowany błąd obcięcia $O(h^2)$.

Metody Rungego-Kutty drugiego rzędu

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + (c_1 K_1 + c_2 K_2)h \\ K_1 &= f(x_i, y_i) \\ K_2 &= f(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} h K_1)\end{aligned}$$

Stałe c_1, c_2, a_2, b_{21} zależą od wybranej metody drugiego rzędu

Zmodyfikowana metoda Eulera w postaci metody RK drugiego rzędu

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad b_{21} = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + h, y_i + K_1h)$$

Przypomnienie

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{Eu})}{2}$$

Równania te można otrzymać całkując ogólne równanie różniczkowe zwyczajne za pomocą metody trapezów.

Metoda MidPoint w postaci metody RK drugiego rzędu

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_{21} = \frac{1}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + K_2 h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1 h\right)$$

Metody RK drugiego rzędu i rozwinięcie w szereg Taylora

y_{i+1} można przybliżyć szeregiem:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{dy}{dx} \Big|_{x_i} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x_i} + O(h^3)$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x_i} = f(x_i, y_i)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x_i} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} \frac{dy}{dx} \Big|_{x_i}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) + O(h^3)$$

Dla metod RK drugiego rzędu:

$$y_{i+1} = y_i + (c_1 K_1 + c_2 K_2)h \quad (*)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} h K_1)$$

Rozwijając K_2 w szereg Taylora:

$$K_2 = f(x_i, y_i) + a_2 h \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_i, y_i} + b_{21} h \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x_i, y_i} K_1 + O(h^2)$$

Wstawiając K_2 i K_1 do (*):

$$y_{i+1} = y_i + c_1 f(x_i, y_i)h + c_2 f(x_i, y_i)h + c_2 a_2 h^2 \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_i, y_i} +$$

$$+ c_2 b_{21} h^2 \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) + O(h^3)$$

Porównując wyrazy tego samego rzędu tu i tu

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_i, y_i} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) + O(h^3)$$

Otrzymujemy:

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_2 a_2 = \frac{1}{2}$$

$$c_2 b_{21} = \frac{1}{2}$$

Trzy równania – cztery niewiadome, zatem wiele rozwiązań.

Dwa przykłady pokazaliśmy wcześniej.

Metody Rungego-Kutty czwartego rzędu

$$y_{i+1} = y_i + (c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 + c_4 K_4)h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} h K_1)$$

$$K_3 = f(x_i + a_3 h, y_i + b_{31} h K_1 + b_{32} h K_2)$$

$$K_4 = f(x_i + a_4 h, y_i + b_{41} h K_1 + b_{42} h K_2 + b_{43} h K_3)$$

Klasyczna metoda RK IV rzędu

$$c_1 = c_4 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = c_3 = \frac{2}{6}, \quad a_2 = a_3 = b_{21} = b_{32} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = b_{43} = 1, \quad b_{31} = b_{41} = b_{42} = 0$$

Wtedy

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

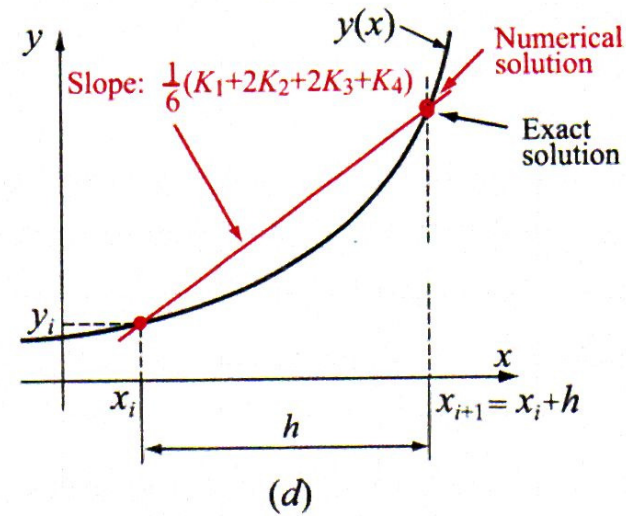
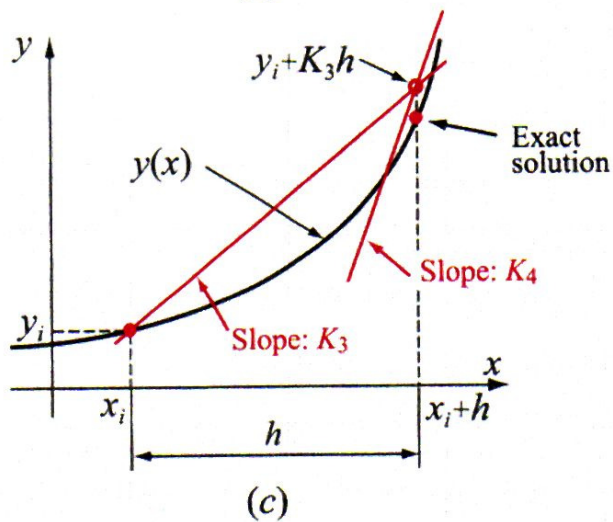
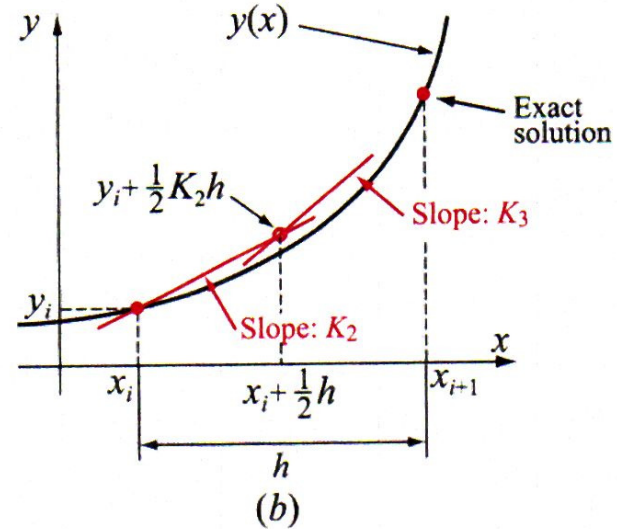
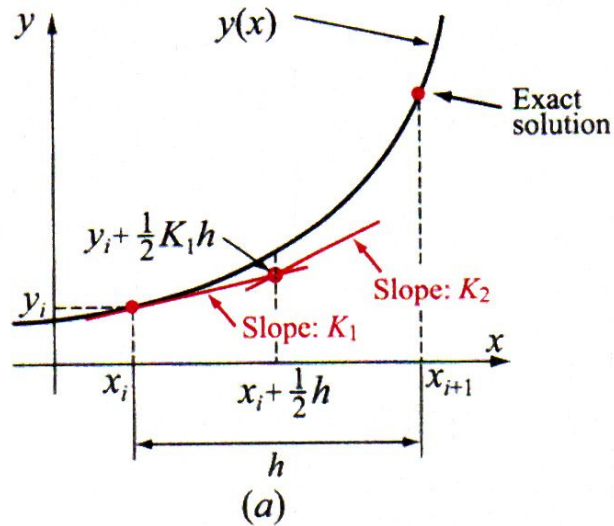
$$K_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1 h)$$

$$K_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_2 h)$$

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + K_3 h)$$

Całkowity błąd obcięcia w metodzie RK IV rzędu jest $O(h^4)$.

Równania w czerwonej ramce można wyprowadzić całkując ogólne równanie różniczkowe za pomocą metody Simpsona 1/3.



Przykład

Rozwiążmy równanie

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2$$

Dokładne rozwiązanie

$$y = 2 + 2x + x^2 - e^x$$

Warunek początkowy: $y(0) = 1$

Krok: $h = 0.1$

Pojedynczy krok:

$$K_1 = h[f(x, y)] = 0.1f(0,1) = 0.1(1 - 0^2) = 0.1$$

$$K_2 = h \left[f \left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}K_1 \right) \right] = 0.1f(0.05, 1.05) = 0.10475$$

$$K_3 = h \left[f \left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}K_2 \right) \right] = 0.1f(0.05, 1. + K_2 / 2) = 0.104988$$

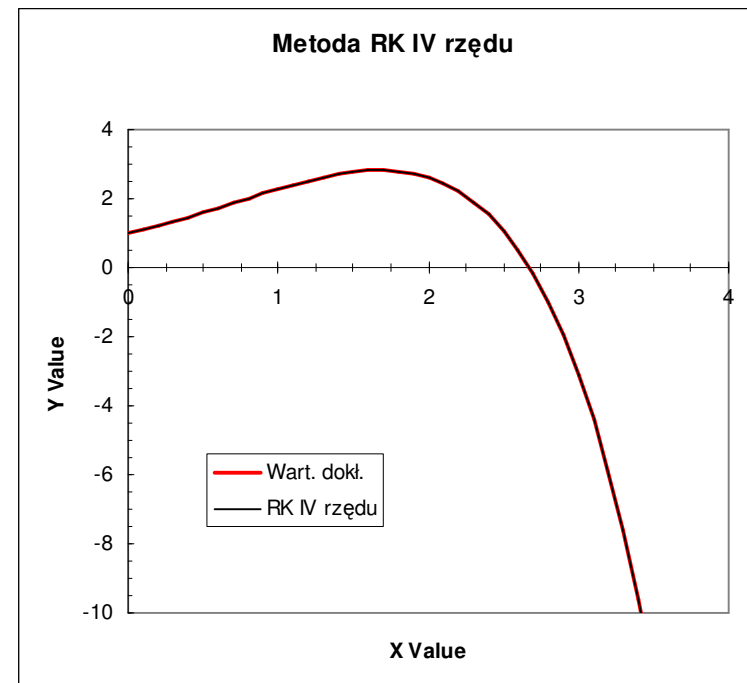
$$K_4 = h[f(x + h, y + K_3)] = 0.1f(0.1, 1.104988) = 0.109499$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] = 1.104829$$

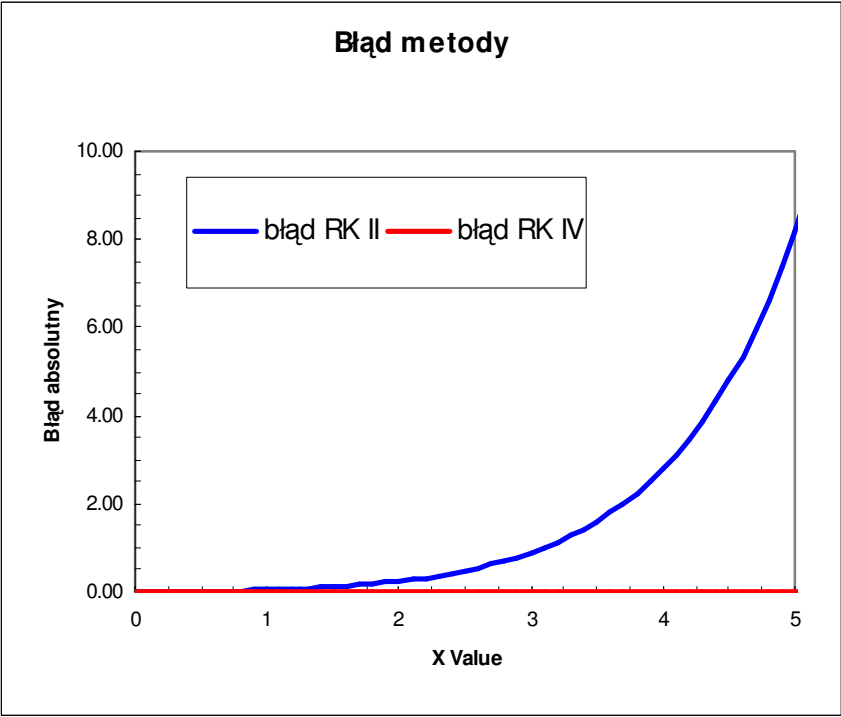
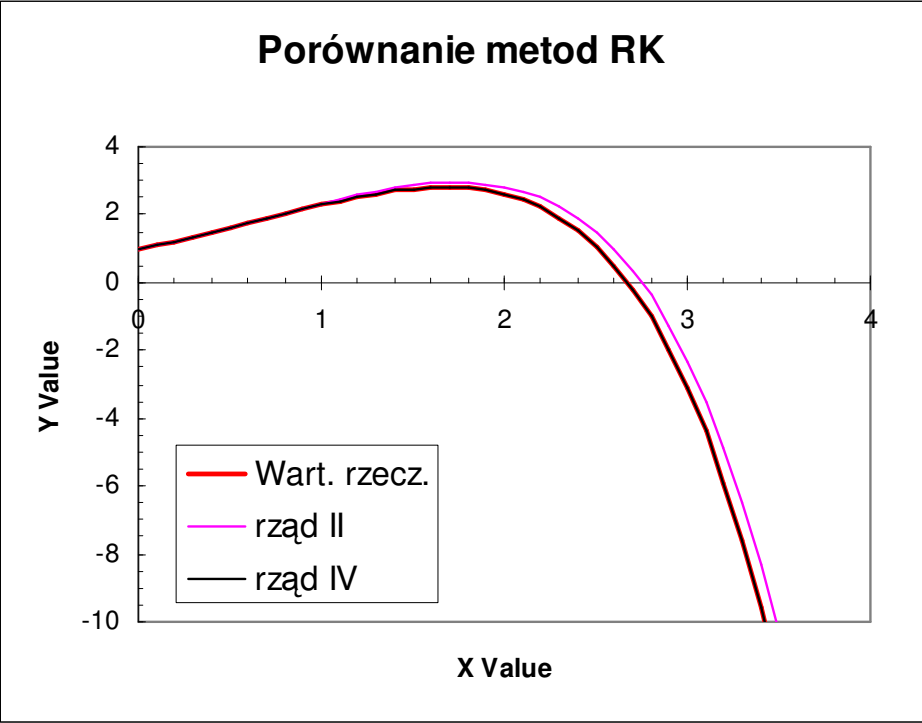
x	y	f(x,y)	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	Wart. rzec:
0	1	1	0.1	0.10475	0.104988	0.109499	1
0.1	1.104829	1.094829	0.109483	0.113707	0.113918	0.117875	1.104829
0.2	1.218597	1.178597	0.11786	0.121503	0.121685	0.125028	1.218597
0.3	1.340141	1.250141	0.125014	0.128015	0.128165	0.130831	1.340141
0.4	1.468175	1.308175	0.130817	0.133108	0.133223	0.13514	1.468175
0.5	1.601278	1.351278	0.135128	0.136634	0.13671	0.137799	1.601279
0.6	1.73788	1.37788	0.137788	0.138427	0.138459	0.138634	1.737881
0.7	1.876246	1.386246	0.138625	0.138306	0.13829	0.137454	1.876247
0.8	2.014458	1.374458	0.137446	0.136068	0.135999	0.134046	2.014459
0.9	2.150396	1.340396	0.13404	0.131492	0.131364	0.128176	2.150397
1	2.281717	1.281717	0.128172	0.12433	0.124138	0.119586	2.281718

Błąd bardzo mały.

$$y(5) = -111.4129 \quad (-111.4132)$$



Porównanie między metodami drugiego i czwartego rzędu pokazuje różnicę:



Układy równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) & y_1(t_1) &= Y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) & y_2(t_1) &= Y_2 \\ & \dots & & \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) & y_n(t_1) &= Y_n\end{aligned}$$

Rozwiązywanie układu r. r. za pomocą metod RK

Najpierw liczymy K_1 dla wszystkich równań.

Potem liczymy K_2 dla dla wszystkich równań.

.....

Gdy znamy wszystkie K , obliczamy wszystkie y_{i+1} .

Przykład: Układ trzech równań różniczkowych

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, w)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, w)$$

$$\frac{dw}{dx} = f_3(x, y, z, w)$$

w zakresie $[a, b]$ z warunkami początkowymi $y(a) = y_1$, $z(a) = z_1$, $w(a) = w_1$.

KROK 1: Liczymy K_1

$$K_{y,1} = f_1(x_i, y_i, z_i, w_i)$$

$$K_{z,1} = f_2(x_i, y_i, z_i, w_i)$$

$$K_{w,1} = f_3(x_i, y_i, z_i, w_i)$$

KROK 2: Liczymy K_2

$$K_{y,2} = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,1}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,1}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,1}h\right)$$

$$K_{z,2} = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,1}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,1}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,1}h\right)$$

$$K_{w,2} = f_3\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,1}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,1}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,1}h\right)$$

KROK 3: Liczymy K_3

$$K_{y,3} = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,2}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,2}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,2}h\right)$$

$$K_{z,3} = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,2}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,2}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,2}h\right)$$

$$K_{w,3} = f_3\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_{y,2}h, z_i + \frac{1}{2}K_{z,2}h, w_i + \frac{1}{2}K_{w,2}h\right)$$

KROK 4: Liczymy K_4

$$K_{y,4} = f_1(x_i + h, y_i + K_{y,3}h, z_i + K_{z,3}h, w_i + K_{w,3}h)$$

$$K_{z,4} = f_2(x_i + h, y_i + K_{y,3}h, z_i + K_{z,3}h, w_i + K_{w,3}h)$$

$$K_{w,4} = f_3(x_i + h, y_i + K_{y,3}h, z_i + K_{z,3}h, w_i + K_{w,3}h)$$

KROK 5: Liczymy y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_{y,1} + 2K_{y,2} + 2K_{y,3} + K_{y,4})h$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(K_{z,1} + 2K_{z,2} + 2K_{z,3} + K_{z,4})h$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(K_{w,1} + 2K_{w,2} + 2K_{w,3} + K_{w,4})h$$

Równania różniczkowe wyższych rzędów

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}}\right) \quad \text{dla } a \leq x \leq b$$

Warunki początkowe:

$$y(a) = A_1, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = A_2, \quad \dots, \quad \left. \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} \right|_{x=a} = A_{n-1}$$

Równanie n-tego rzędu można przekształcić w układ n równań pierwszego rzędu:

$$w_1 = \frac{dy}{dx}, \quad w_2 = \frac{dw_1}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots, \quad w_{n-1} = \frac{dw_{n-2}}{dx} = \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}}$$

Mamy zatem układ:

$$\frac{dy}{dx} = w_1 \quad \text{z warunkiem } y(a) = A_1$$

$$\frac{dw_1}{dx} = w_2 \quad \text{z warunkiem } w_1(a) = A_2$$

...

$$\frac{dw_{n-2}}{dx} = w_{n-1} \quad \text{z warunkiem } w_{n-2}(a) = A_{n-1}$$

Przykład:

Równanie różniczkowe trzeciego rzędu

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 2x - 3y + 4 \frac{dy}{dx} + x \frac{d^2 y}{dx^2}$$

z warunkami początkowymi:

$$y(0) = 3$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 7$$

można przekształcić do postaci

$$\frac{dy}{dx} = w_1 \quad \text{z warunkiem } y(0) = 3$$

$$\frac{dw_1}{dx} = w_2 \quad \text{z warunkiem } w_1(0) = 2$$

$$\frac{dw_2}{dx} = 2x - 3y + 4w_1 + xw_2 \quad \text{z warunkiem } w_2(0) = 7$$

Stabilność metody

Gdy rozwiązujemy równanie różniczkowe numerycznie, chcielibyśmy, by błąd nie narastał wraz z kolejnymi krokami rozwiązania. Czasami jednak tak nie jest – objawia się wtedy niestabilność metody.

W ogólności stabilność rozwiązania zależy od:

1. Wybranej metody numerycznej
2. Kroku h używanego w metodzie
3. Specyfiki równania różniczkowego.

Istnieje kilka sposobów analizowania stabilności rozwiązań.

Jak akumuluje się błąd zaokrągleń?

- ➡ Porównanie rozwiązań z wykorzystaną pojedynczą precyzją obliczeń (float) z rozwiązaniami z podwójną precyzją (double).

Jak akumuluje się błąd obcięcia?

- ➡ Porównanie rozwiązań przy różnej wielkości kroku h .

Inny sposób: weźmy równanie, którego rozwiązanie jest znane analitycznie. Jeśli metoda jest niestabilna przy analizie tego równania, to można oczekiwać, że będzie też niestabilna przy analizie innych równań.

Weźmy równanie:

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha y \quad \alpha > 0 \quad \text{przy warunku} \quad y(0) = 1$$

Rozwiązanie analityczne: $y(x) = e^{-\alpha x}$

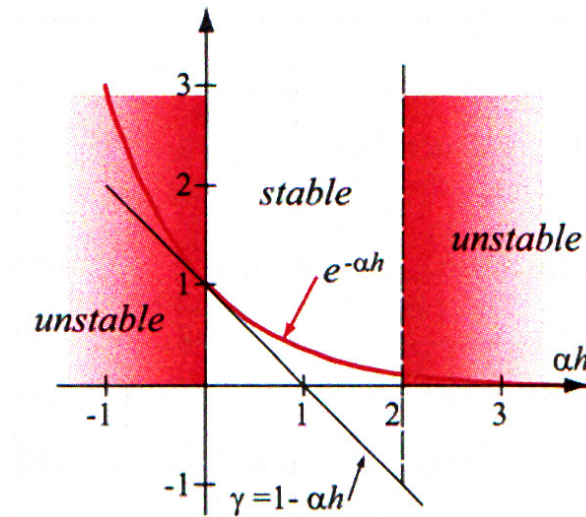
Zatem w punkcie $i+1$:

$$y^{TS}(x_{i+1}) = e^{-\alpha x_{i+1}} = e^{-\alpha(x_i+h)} = e^{-\alpha x_i} e^{-\alpha h} = y^{TS}(x_i) e^{-\alpha h}$$

Rozwiązanie numeryczne metodą Eulera:

$$y_{i+1} = y_i + (-\alpha y_i)h = (1 - \alpha h) y_i$$

Porównując oba równania widzimy, że $(1 - \alpha h)$ jest przybliżeniem wykładnika w rozwiązaniu analitycznym.



$$-1 < 1 - \alpha h < 1$$

$$0 < \alpha h < 2$$

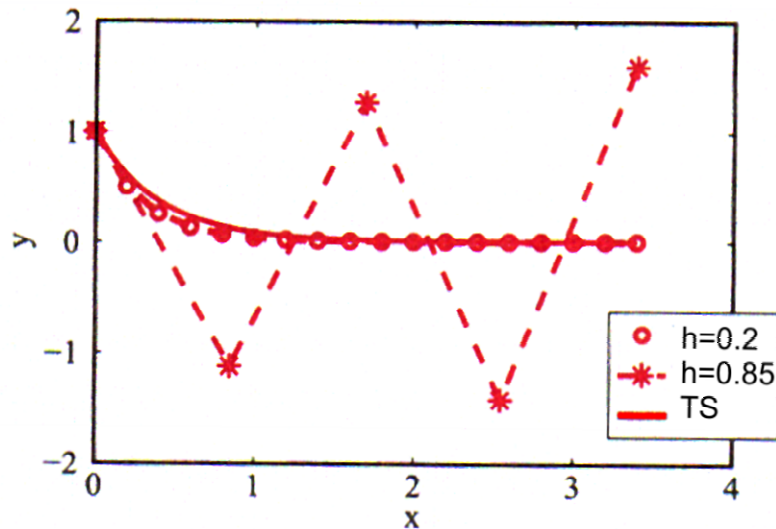
Warunek stabilności.

Ponieważ α zależy od równania, oznacza to, że metoda będzie stabilna dla wystarczająco małego h .

Przykład:

$$\frac{dy}{dx} = -2.5y$$

przy warunku $y(0) = 1$



Wniosek: Metody jawne (Eulera, Runge-Kutty) są numerycznie stabilne, jeśli krok h jest wystarczająco mały.

Metody niejawne są bezwarunkowo stabilne.

