Metody numeryczne

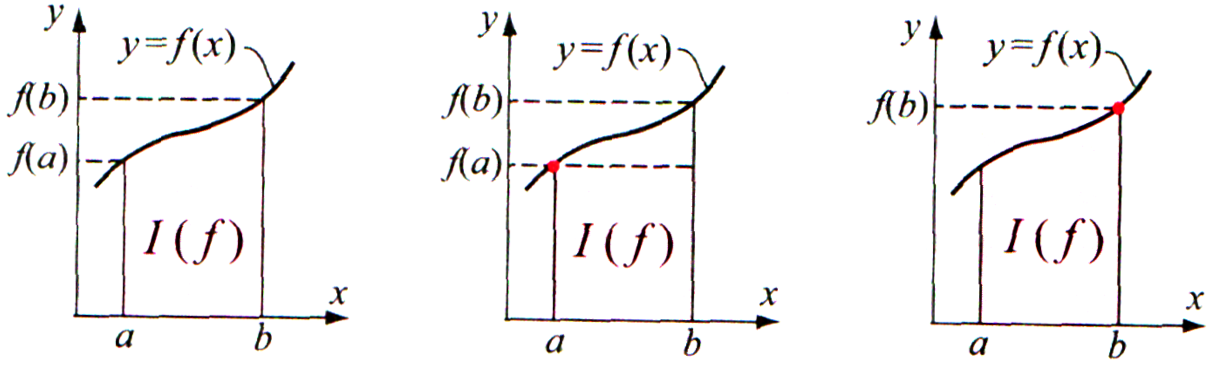
Wykład nr 7

dr hab. Piotr Fronczak

Całkowanie numeryczne

Całkowanie numeryczne to przybliżone obliczanie całek oznaczonych. Metody całkowania numerycznego polegają na przybliżeniu całki za pomocą odpowiedniej sumy ważonej wartości całkowanej funkcji w kilku punktach. Aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie dzieli się przedział całkowania na niewielkie fragmenty. Ostateczny wynik jest sumą oszacowań całek w poszczególnych podprzedziałach.

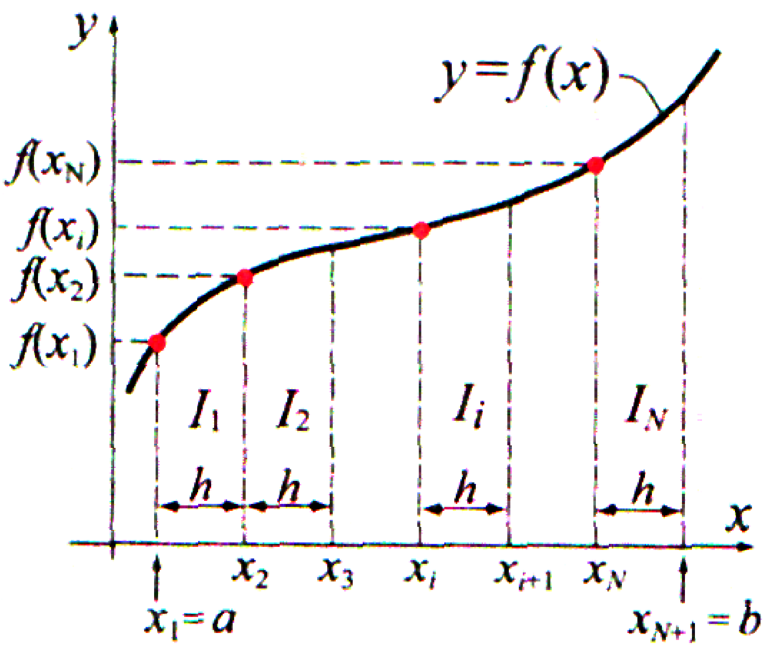
I. Metoda prostokątów



$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx = f(a)(b-a)$$

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(b)dx = f(b)(b-a)$$

Podzielmy przedział $[a,b]$ na N podprzedziałów.

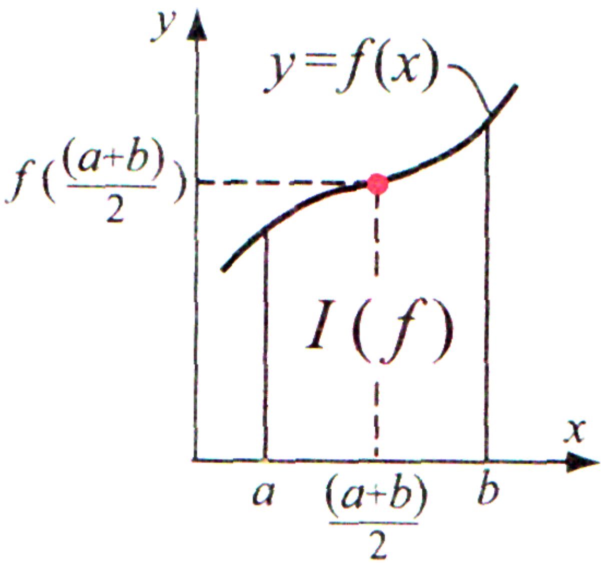


$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)+\ldots+f(x_N)(x_{N+1}-x_N)$$

$$I(f)\approx\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i)(x_{i+1}-x_i)\right]$$

Gdy podprzedziały są równe $\quad I(f)\approx h\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$

Pewnym udoskonaleniem metody kwadratów jest wybór wartości funkcji w środku przedziału.



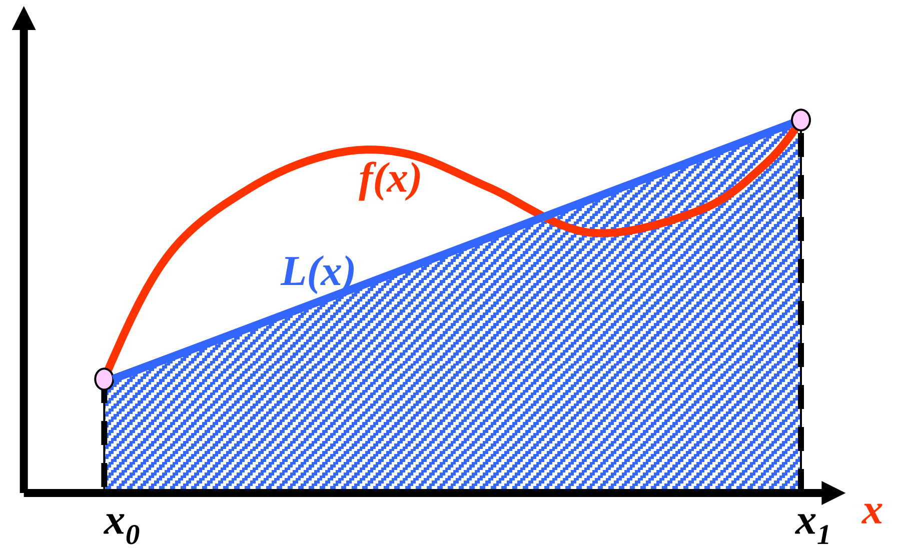
$$I(f) \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

W przypadku wielu podprzedziałów:

$$I(f) \approx h\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

II. Metoda trapezów

Przybliżamy funkcję podcałkową prostą.



$$L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$\mathrm{a} = \mathrm{x}_0,\ \mathrm{b} = \mathrm{x}_1,\quad \xi = \frac{x-a}{b-a},\quad \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{h}};\quad h = b - a$$

$$\left.\begin{cases} x = a & \Rightarrow \xi = 0 \\ x = b & \Rightarrow \xi = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow L(\xi) = (1-\xi) f(a) + (\xi) f(b)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx = h\int_0^1 L(\xi)d\xi$$

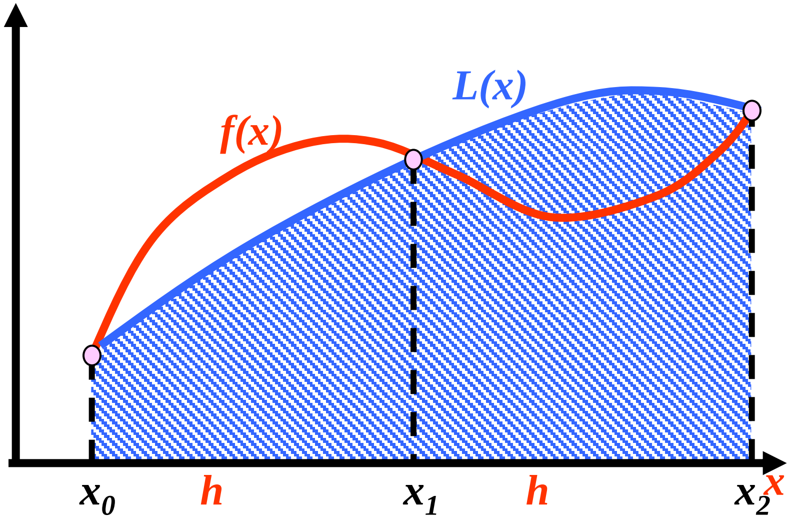
$$= f(a)h\int_0^1 (1-\xi)d\xi + f(b)h\int_0^1 \xi d\xi$$

$$= f(a)h(\xi - \frac{\xi^2}{2})\Big|_0^1 + f(b)h\frac{\xi^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

W przypadku wielu podprzedziałów:

$$I(f) \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

II. Metoda Simpsona 1/3



Przybliżamy funkcję podcałkową parabolą.

$$L(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$x_0=a,\ x_2=b,\ x_1=\frac{a+b}{2}\qquad h=\frac{b-a}{2},\ \xi=\frac{x-x_1}{h},\ d\xi=\frac{dx}{h}$$

$$\begin{cases} x=x_0 \Rightarrow \xi=-1 \\ x=x_1 \Rightarrow \xi=0 \\ x=x_2 \Rightarrow \xi=1 \end{cases}$$

$$\boxed{L(\xi)=\frac{\xi(\xi-1)}{2}f(x_0)+(1-\xi^2)f(x_1)+\frac{\xi(\xi+1)}{2}f(x_2)}$$

$$\boxed{L(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2} f(x_0) + (1-\xi^2) f(x_1) + \frac{\xi(\xi+1)}{2} f(x_2)}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\int_{-1}^{1} L(\xi)d\xi = f(x_0)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\xi(\xi-1)d\xi$$

$$+ f(x_1)h\int_0^1(1-\xi^2)d\xi + f(x_2)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\xi(\xi+1)d\xi$$

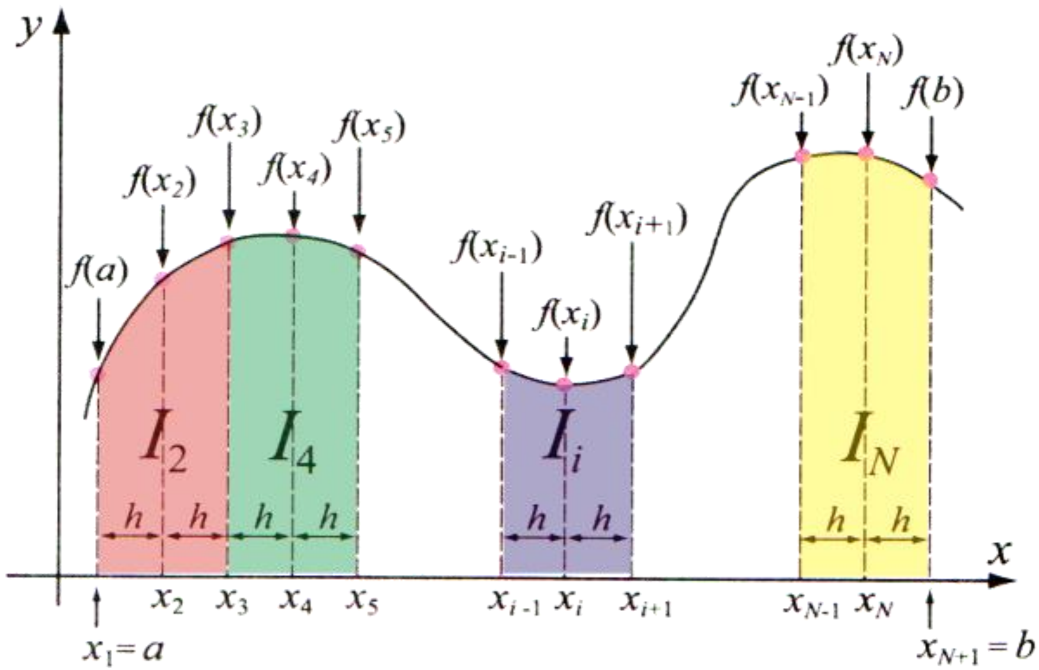
$$= f(x_0)\frac{h}{2}\left(\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + f(x_1)h\left(\xi-\frac{\xi^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$+ f(x_2)\frac{h}{2}\left(\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]}$$

W przypadku N podprzedziałów o szerokości $h = (b - a) / N$:

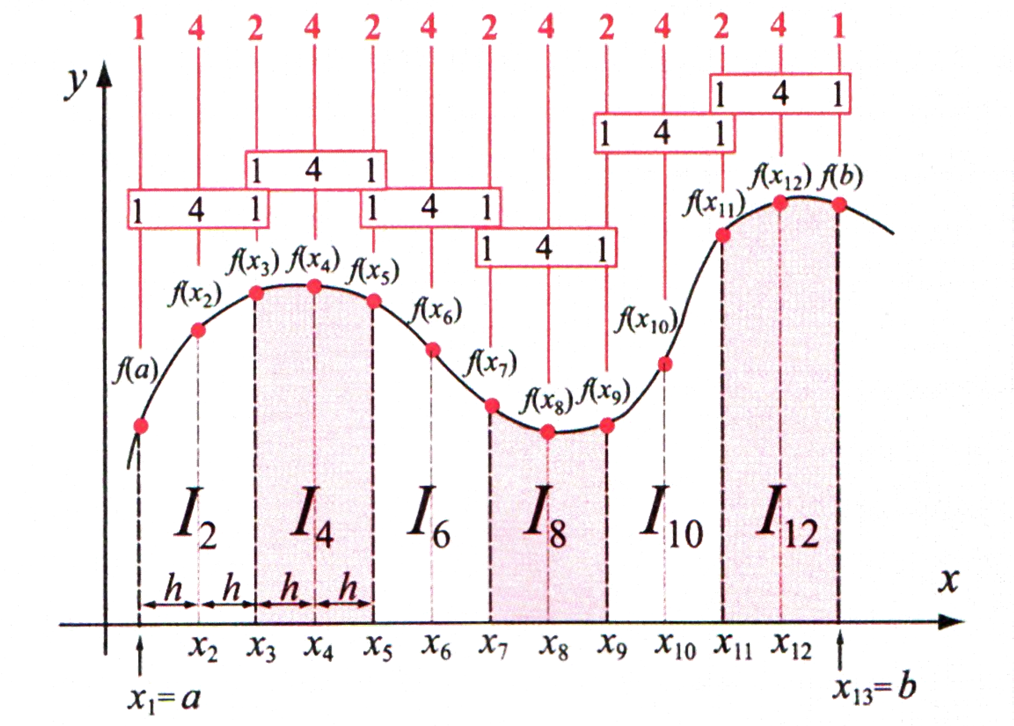
UWAGA: Ponieważ wielomian kwadratowy jest określony poprzez trzy punkty (a zatem dwa przedziały), to liczba przedziałów musi być **parzysta**.



$$I(f) = \sum_{i=2,4,6}^{N} I_i(f), \qquad gdzie \qquad I_i(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

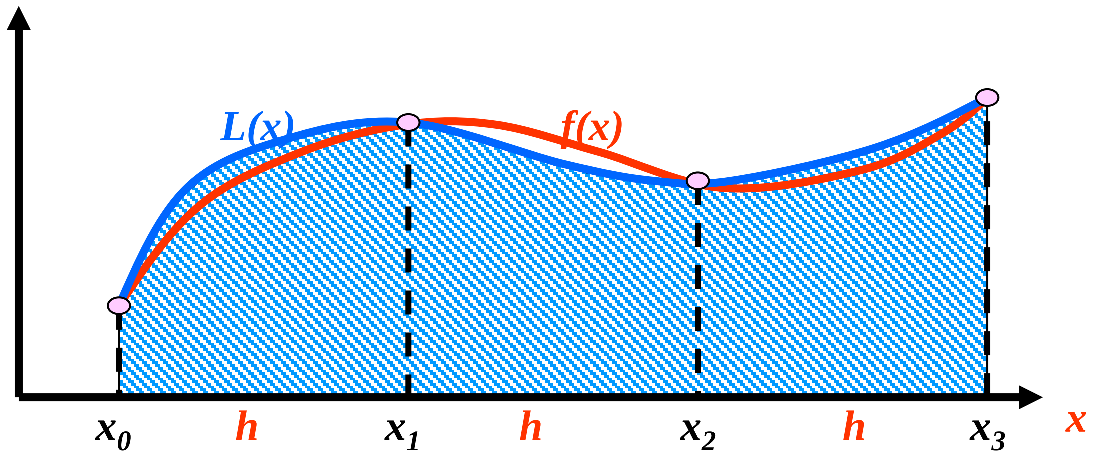
$$I(f) \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=2,4,6}^{N} f(x_i) + 2\sum_{j=3,5,7}^{N-1} f(x_j) + f(b) \right]$$

Jest to ważona suma wartości funkcji w punktach definiujących podprzedziały.



II. Metoda Simpsona 3/8

Przybliżamy funkcję podcałkową wielomianem trzeciego stopnia.



$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2)$$

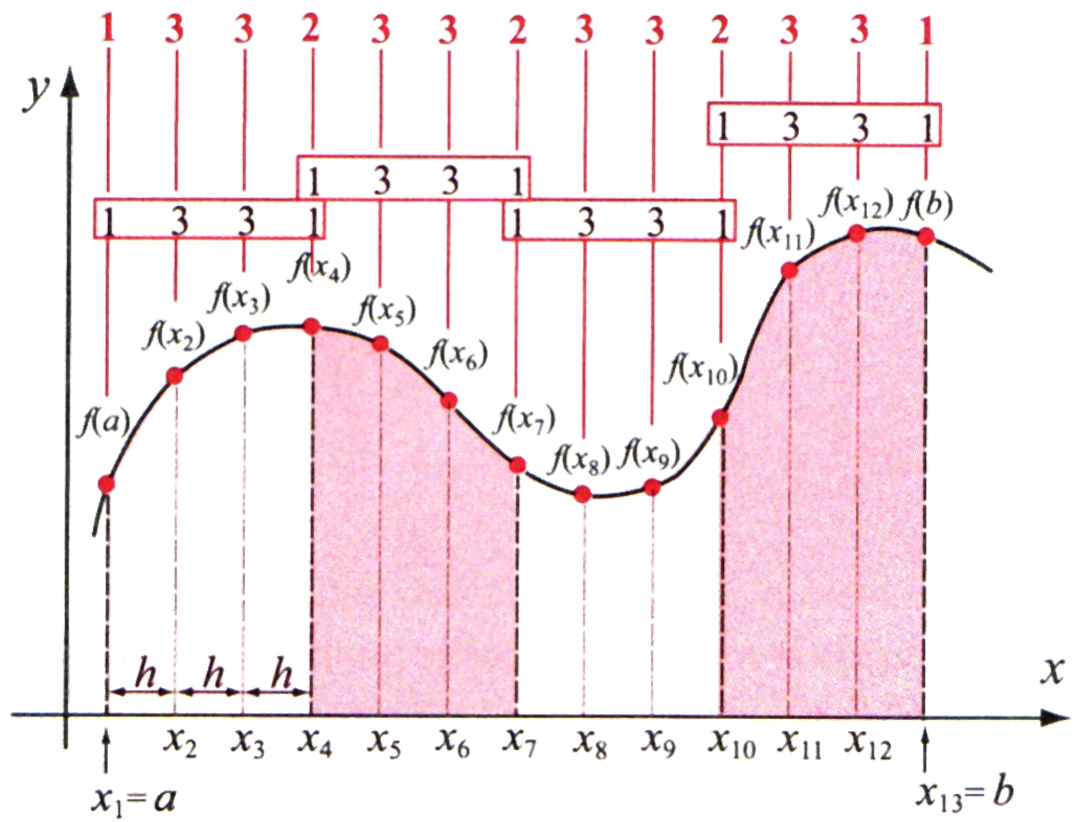
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx \;; \quad h = \frac{b\text{ - }a}{3} \\ &= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] \end{aligned}}$$

W przypadku N podprzedziałów o szerokości $h = (b - a) / N$:

UWAGA: Ponieważ wielomian kubiczny jest określony poprzez cztery punkty (a zatem trzy przedziały), to liczba podprzedziałów musi być podzielna przez 3.

$$I(f) \approx \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3\sum_{i=2,5,8}^{N-1}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] + 2\sum_{j=4,7,10}^{N-2} f(x_j) + f(b)\right]$$



Przykład:

$$I = \int_0^4 xe^{2x}dx \qquad (= 5216.93)$$

	metoda prostokątów	metoda trapezów	metoda Simpsona 1/3	metoda Simpsona 3/8
N = 1	436 -91.64%	23847 357.19%	15898 204.79%	6819 30.73%
N = 6	4749 -8.95%	6179 18.46%	5331 2.20%	5430 4.10%
N = 12	5094 -2.34%	5468 4.83%	5225 0.17%	5235 0.36%
N = 18	5162 -1.04%	5326 2.11%	5218 0.04%	5220 0.08%

Oszacowanie błędów

Metoda prostokątów

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx = f(a)(b-a)$$

Błąd wynosi $$E=\int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a)$$

Rozwijając $f(x)$ w szereg Taylora blisko punktu a otrzymujemy

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)$$

gdzie ξ jest punktem między a i b.

Całkując obie strony tego równania otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left[f(a)+f'(\xi)(x-a)\right]dx = f(a)(b-a)+\frac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2$$

Zatem błąd wyniesie $$E=\frac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2$$

Zależy on od szerokości przedziału całkowania i wartości pierwszych pochodnych $f(x)$ w tym przedziale.

Błąd można znacząco zredukować dzieląc przedział na mniejsze podprzedziały.

Ponieważ

$$E = \frac{1}{2} f'(\xi)(b-a)^2$$

to

$$E_i = \frac{1}{2} f'(\xi_i)h^2$$

Całkowity błąd

$$E = \sum_i E_i = \frac{1}{2} h^2 \sum_{i=1}^{N} f'(\xi_i)$$

Przyjmując, że średnio

$$\overline{f'} \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} f'(\xi_i)}{N}$$

oraz

$$h = \frac{(b-a)}{N}$$

$$E = \frac{(b-a)}{2} h \overline{f'} = O(h)$$

Metoda trapezów

Rozwijając w szereg Taylora

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2} f''(\xi)(a-x)^2$$

Całkując

$$f(a)(b-a) = \int_a^b f(x)dx + af(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x)dx + \frac{1}{6} f''(\xi)(b-a)^3$$

Pamiętając, że

$$\int_a^b xf'(x)dx = xf(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)dx$$

$$f(a)(b-a) = 2\int_a^b f(x)dx - f(b)(b-a) + \frac{1}{6} f''(\xi)(b-a)^3$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a) - \frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a) - \frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

Przyjmując, że średnio

$$\overline{f''} \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} f''(\xi_i)}{N}$$

oraz

$$h = \frac{(b-a)}{N}$$

Otrzymujemy

$$E = -\frac{(b-a)}{12}\overline{f''}h^2 = O(h^2)$$

Metoda prostokątów (udoskonalona)

$$E = \frac{(b-a)}{24}\overline{f''}h^2 = O(h^2)$$

Metoda Simpsona 1/3

$$E = \frac{(b-a)}{180}\overline{f^{IV}}h^4 = O(h^4)$$

Metoda Simpsona 3/8

$$E = \frac{(b-a)}{80}\overline{f^{IV}}h^4 = O(h^4)$$

Ekstrapolacja Richardsona

Idea: zredukować błąd metody numerycznej z $O(h^k)$ do $O(h^{k+1})$

Rozwińmy całkę jako funkcję h w szereg wokół punktu $h=0$.

$$I = I(h) + Kh^k + K'h^{k+1} + K''h^{k+2} + \ldots$$

I – rzeczywista wartość całki

$I(h)$ – numeryczna wartość całki

K, K', K'' niewiadome – reprezentują wartości błędów

$$I = I(h) + Kh^k + O(h^{k+1})$$

Redukując h otrzymujemy inne równanie na I:

$$I = I(h/2) + K(h/2)^k + O(h^{k+1})$$

Pamiętajmy, że $O(h^{k+1})$ w obu równaniach jest inne.

Zatem mamy dwa równania na I

$$I = I(h) + Kh^k + O(h^{k+1}) \qquad \texttt{(1)} \quad \texttt{oraz}$$

$$I = I(h/2) + K(h/2)^k + O(h^{k+1}) = I(h/2) + \frac{Kh^k}{2^k} + O(h^{k+1}) \quad \texttt{(2)}$$

Wyeliminujmy wiodący błąd K:

$$2^k I - I = 2^k * \texttt{(2)} \ - \ \texttt{(1)}$$

$$(2^k\text{-}1)I = 2^k I(h/2) + Kh^k + O(h^{k+1}) - I(h) - Kh^k - O(h^{k+1})$$

$$= 2^k I(h/2) - I(h) + O(h^{k+1})$$

$$\Rightarrow I = \frac{2^k I(h/2) - I(h)}{2^k - 1} + O(h^{k+1})$$

Czyli wyeliminowaliśmy błąd Kh^k i zredukowaliśmy rząd błędu z k do $k+1$.

Przykład: metoda trapezów

$$I = I(h) - \frac{(b-a)}{12}\overline{f''}h^2$$

$$I = I(h_1) + Kh_1^2$$

$$I = I(h_2) + Kh_2^2$$

K jest takie same (średnia wartość drugiej pochodnej po f nie zależy od h).

Eliminując K otrzymujemy:

$$I = \frac{I(h_1) - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}$$

Dla $h_1 = 2h_2$

$$I = \frac{4I(h_2) - I(h_1)}{3}$$

Można pokazać, że $I = I(h) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 + \ldots$ => Błąd $O(h^4)$

Gdy mamy całkę obliczoną numerycznie z dokładnością $O(h^4)$ postępujemy analogicznie:

$$I = I(h_1) + Kh_1^4$$

$$I = I(h_2) + Kh_2^4$$

Eliminując K otrzymujemy:

$$I = \frac{I(h_1) - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^4 I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^4}$$

Dla $h_1 = 2h_2$

$$I = \frac{16I(h_2) - I(h_1)}{15}$$

Błąd $O(h^6)$

Uogólnienie:

Jeśli I_n jest przybliżeniem wartości całki przy użyciu n podprzedziałów (krok h), a I_{2n} jest przybliżeniem wartości całki przy użyciu $2n$ podprzedziałów (krok $h/2$)

Jeśli oba przybliżenia mają ten sam błąd rzędu h^p, to nowe przybliżenie całki

$$I = \frac{2^p I_{2n} - I_n}{2^p - 1}$$

będzie miało błąd rzędu h^{p+2}.

Metoda Romberga

Metoda ta zwiększa dokładność oszacowania całki poprzez sukcesywne zastosowanie ekstrapolacji Richardsona.

$$\boxed{I_{j,k+1} = \frac{4^k I_{j+1,k} - I_{j,k}}{4^k - 1}; \qquad \mathtt{k = 1,\ 2,\ 3,}\cdots}$$

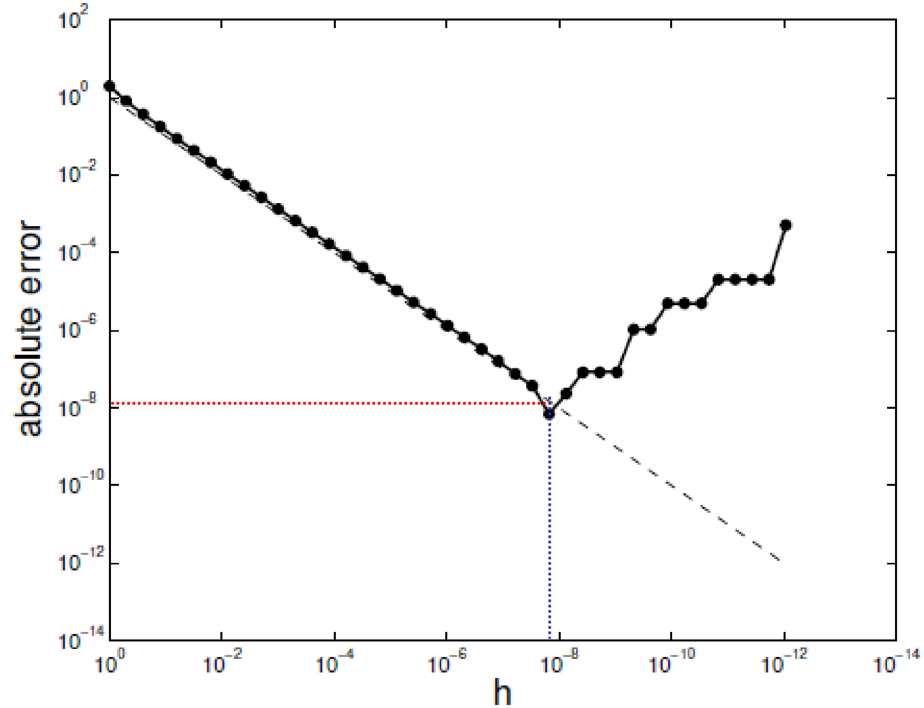
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$
h	$I_{0,0}$	$I_{0,1}$	$I_{0,2}$	$I_{0,3}$	$I_{0,4}$
$h/2$	$I_{1,0}$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$	
$h/4$	$I_{2,0}$	$I_{2,1}$	$I_{2,2}$		
$h/8$	$I_{3,0}$	$I_{3,1}$			
$h/16$	$I_{4,0}$				
		$\frac{4I_{j+1,0} - I_{j,0}}{3}$	$\frac{16I_{j+1,1} - I_{j,1}}{15}$	$\frac{64I_{j+1,2} - I_{j,2}}{63}$	$\frac{256I_{j+1,3} - I_{j,3}}{255}$

Przykład:

$$\boxed{I = \int_0^4 xe^{2x}dx = 5216.926477}$$

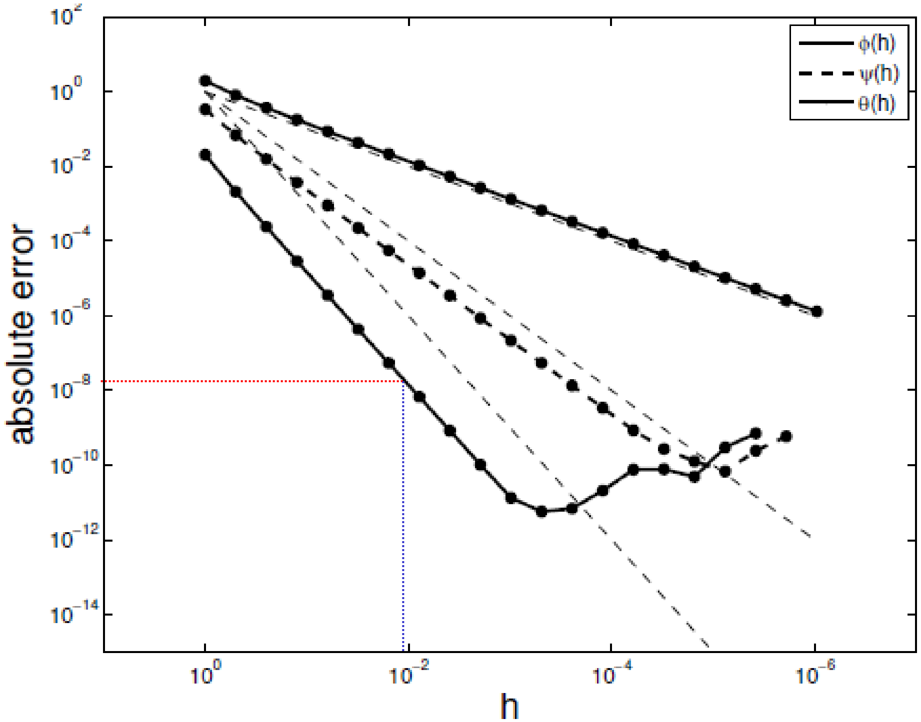
Met. trapezów

	$k=0$ $O(h^2)$	$k=1$ $O(h^4)$	$k=2$ $O(h^6)$	$k=3$ $O(h^8)$	$k=4$ $O(h^{10})$
$h=4$	23847.7	8240.41	5499.68	5224.84	5216.95
$h=2$	12142.2	5670.98	5229.14	5217.01	
$h=1$	7288.79	5256.75	5217.20		
$h=0.5$	5764.76	5219.68			
$h=0.25$	5355.95				
$\varepsilon=$	-2.66%	-0.0527%	-0.0053%	-0.00168%	-0.00050%



Błąd przy całkowaniu podstawową metodą trapezów.

By uzyskać błąd rzędu 10^{-8} należy przyjąć krok 10^{-8} (czyli 10^{8} podprzedziałów)



Kolejne przybliżenia metodą Romberga $O(h^2)$, $O(h^4)$ i $O(h^6)$.

Ten sam błąd można uzyskać przy znacznie mniejszej liczbie podprzedziałów.

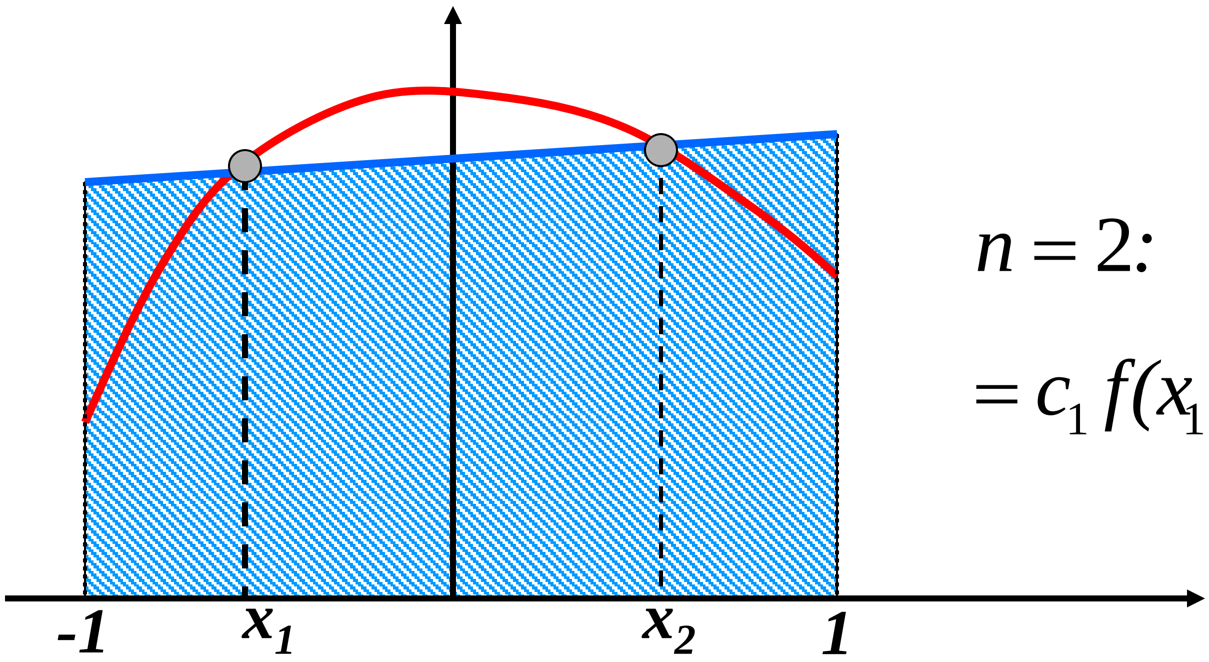
Kwadratura Gaussa na przedziale [-1, 1]

Dotychczas wszystkie metody wykorzystywały do obliczenia całki ważone wartości równo rozmieszczonych punktów. Położenia punktów były stałe dla danej metody.

W metodzie zwanej kwadraturą Gaussa nie są rozłożone równomiernie (ponadto punkty krańcowe również nie są brane pod uwagę). Położenie punktów oraz odpowiadające im wagi są dobierane tak, by zminimalizować błąd.

Ogólna postać kwadratury Gaussa

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)$$



$$n = 2: \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Wybieramy (c_1, c_2, x_1, x_2) tak, by metoda zwróciła dokładną wartość całki, gdy funkcja ma postać $f(x) = x^0, x^1, x^2, x^3$

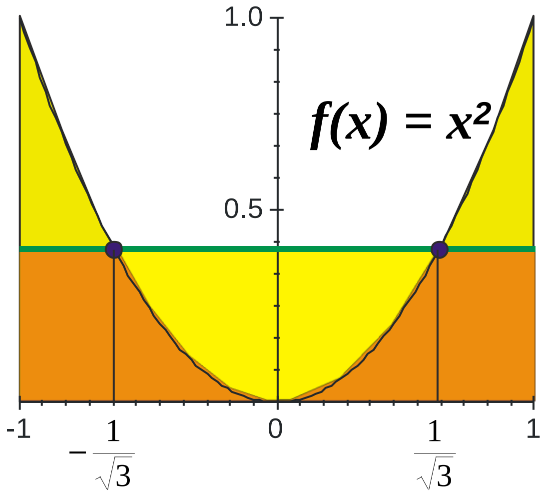
$$n = 2: \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Dokładna całka dla $f = x^0, x^1, x^2, x^3$

- **Cztery równania z czterema niewadomymi**

$$\begin{cases} f = 1 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = 2 = c_1 + c_2 \\ f = x & \Rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ f = x^2 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \\ f = x^3 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

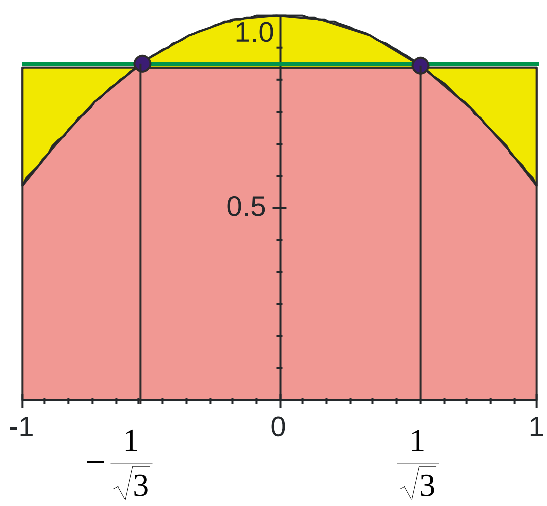
$$\boxed{I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$



Kwadratura Gaussa daje dokładną wartość,

gdy funkcja $f(x) = 1, x, x^2, x^3$, lub liniowa kombinacja

powyższych.



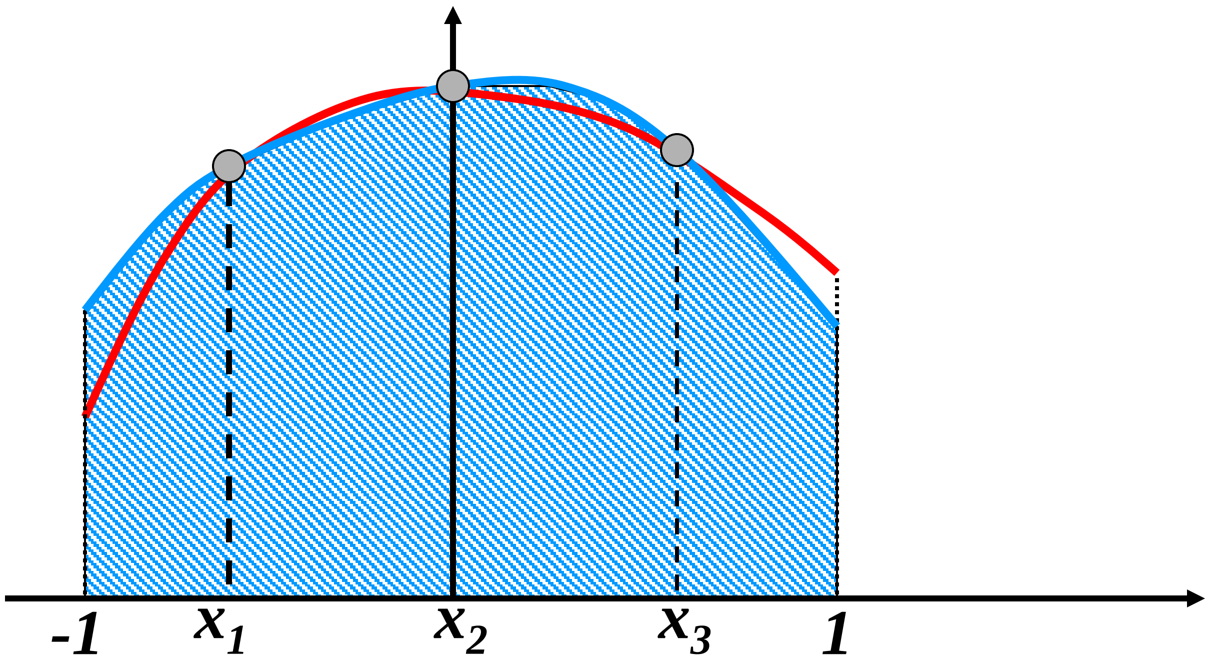
$$\int_{-1}^{1} \cos(x)dx = 1.68294$$

$$\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.676$$

Błąd 4.2%

Aby zwiększyć dokładność obliczeń należy wziąć więcej wyrazów w kwadraturze:

$$n = 3: \qquad \int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$



Wybieramy $(c_1, c_2, c_3, x_1, x_2, x_3)$ tak, by metoda zwróciła dokładną wartość całki, gdy funkcja ma postać $f(x) = x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$

Sześć równań z sześcioma niewiadomymi

$$f=1\Rightarrow\int_{-1}^{1}xdx=2=c_1+c_2+c_3$$

$$f=x\Rightarrow\int_{-1}^{1}xdx=0=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$$

$$f=x^2\Rightarrow\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}=c_1x_1^2+c_2x_2^2+c_3x_3^2$$

$$f=x^3\Rightarrow\int_{-1}^{1}x^3dx=0=c_1x_1^3+c_2x_2^3+c_3x_3^3$$

$$f=x^4\Rightarrow\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}=c_1x_1^4+c_2x_2^4+c_3x_3^4$$

$$f=x^5\Rightarrow\int_{-1}^{1}x^5dx=0=c_1x_1^5+c_2x_2^5+c_3x_3^5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1=5/9\\c_2=8/9\\c_3=5/9\\x_1=-\sqrt{3/5}\\x_2=0\\x_3=\sqrt{3/5}\end{cases}$$

$$\boxed{I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{9} f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{\frac{3}{5}})}$$

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)dx = 1.68294$$

$$\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.676$$

Błąd 4.2%

$$\frac{5}{9}\cos\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\cos(0) + \frac{5}{9}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 1.68285$$

Błąd 0.005%

Wagi i położenia punktów Gaussa są słuszne tylko w przypadku całkowania w granicach [-1, 1].

W ogólności konieczna transformacja zmiennych:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{2}\left[t(b-a)+a+b\right] \\ dx = \frac{1}{2}(b-a)dt \end{array} \right\} = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+a+b}{2}\right)\frac{(b-a)}{2}dt$$

Przykład:

$$I = \int_0^4 xe^{2x}dx = 5216.926477$$

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} = 2t+2; \qquad dx = 2dt$$

$$I = \int_0^4 xe^{2x}dx = \int_{-1}^{1}(4t+4)e^{4t+4}dt = \int_{-1}^{1} f(t)dt$$

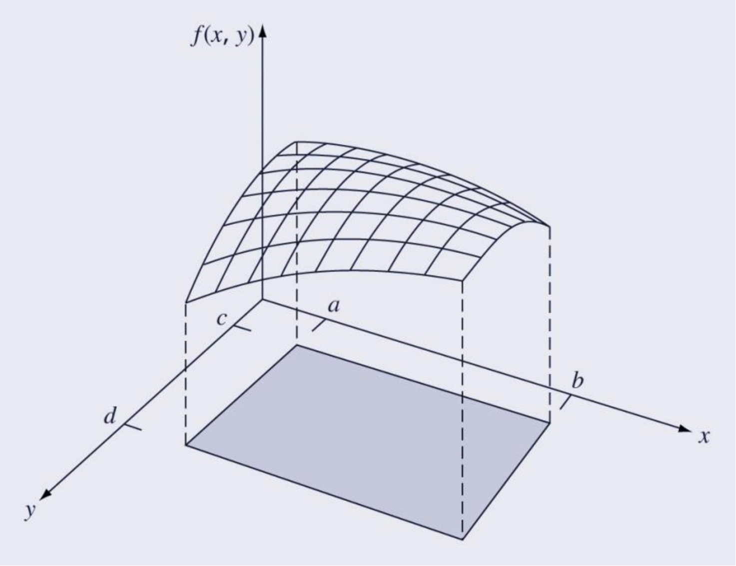
Przybliżenie czterema punktami Gaussa:

$$I = \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0.34785\left[f(-0.861136) + f(0.861136)\right]$$
$$+0.652145\left[f(-0.339981) + f(0.339981)\right]$$
$$= 5197.54375 \qquad\qquad (\varepsilon = 0.37\%)$$

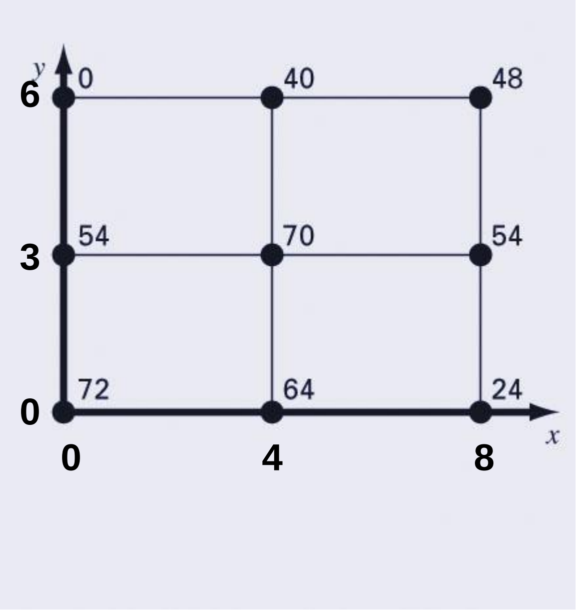
Całki wielokrotne

$$I = \int_A f(x,y)dA = \int_a^b G(x)dx$$

$$G(x) = \int_{g(x)}^{p(x)} f(x,y)dy$$



$$I(f) \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$



$$\tfrac{4}{2}[(0+40)+(40+48)] \longrightarrow 256$$

$$\tfrac{4}{2}[(54+70)+(70+54)] \longrightarrow 496$$

$$\tfrac{4}{2}[(72+64)+(64+24)] \longrightarrow 448$$

$$\tfrac{3}{2}[(448+496)+(496+256)] = 2688$$