Metody numeryczne

Wykład nr 3

dr hab. Piotr Fronczak

Rozwiązywanie układów algebraicznych równań liniowych

Pojęcia podstawowe

1. **Układ algebraicznych równań liniowych**

Układ liniowy *m* równań z *n* niewiadomymi postaci

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Postać macierzowa $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Gdy $m > n$ – układ równań liniowych nadokreślonych
Gdy $m < n$ – układ równań liniowych niedookreślonych (wtedy np. metoda najmniejszych kwadratów)

2. **Macierz diagonalna** (wszystkie współczynniki leżące poza główną przekątną są zerowe)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

3. **Macierz jednostkowa**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

4. Dolna macierz trójkątna (wszystkie elementy ponad przekątną są zerowe)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

5. Górna macierz trójkątna (wszystkie elementy pod przekątną są zerowe)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

6. Macierz przekątniowo dominująca (wartości bezwzględne elementów na głównej przekątnej są większe od sumy wartości bezwzględnych pozostałych elementów w wierszach)

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -14 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Układ równań jest **źle uwarunkowany**, jeśli mała zmiana macierzy współczynników, lub wektora wyrazów wolnych prowadzi do dużej zmiany wektora rozwiązań.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.999 \end{bmatrix} \quad \text{ma rozwiązanie} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{bmatrix} \quad \text{ma rozwiązanie} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.999 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.001 & 2.001 \\ 2.001 & 3.998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.999 \end{bmatrix} \quad \text{ma rozwiązanie} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.994 \\ 0.0014 \end{bmatrix}$$

Norma macierzy

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(maksymalna suma bezwzględnych wartości w wierszu)

Liczba warunkowa

$$Cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Można pokazać, że $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq Cond(A) \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$ oraz $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq Cond(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

Najmniejszy możliwy błąd, to precyzja zapisu liczby zmiennoprzecinkowej $\varepsilon_{\mathrm{mach}}$ w komputerze.

Czyli $Cond(A)\varepsilon_{\mathrm{mach}}$ da nam informację, ile jest cyfr znaczących m w rozwiązaniu.

$$Cond(A)\varepsilon_{mach} < 0.5 \times 10^{-m}$$

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.999 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3999 & 2000 \\ 2000 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$\|A\| = 5.999$$

$$\|A^{-1}\| = 5999$$

$$Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = 35990$$

Załóżmy, że działamy na typie **float** (23 bity)

$$\varepsilon_{mach} = 2^{-23} = 0.12 \times 10^{-6}$$

$$Cond(A)\varepsilon_{mach} = 0.429 \times 10^{-2}$$

$$0.429 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-m}$$

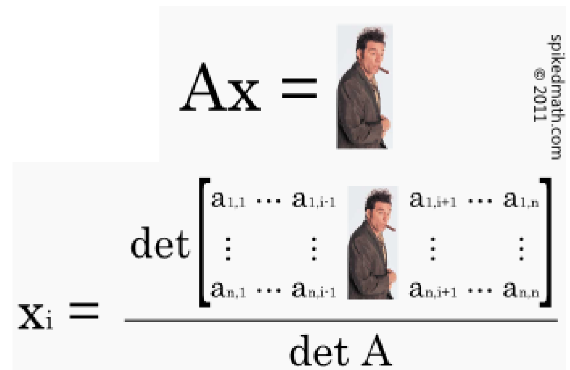
$$m < 2.067$$

Czyli mamy tylko dwie cyfry znaczące w rozwiązaniu.

Metody dokładne

Polegają na takim przekształcaniu danych $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{b}$, że po skończonej liczbie dokładnie wykonywanych działań arytmetycznych otrzymujemy rozwiązanie.

Np. wzory Cramera



$$x_i = \frac{W_i}{W}$$

gdzie W – wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$, a wyznacznik W_i powstaje przez wstawienie kolumny wyrazów wolnych do i-tej kolumny wyznacznika W

Stosując wzory Cramera należy obliczyć $(n+1)$ wyznaczników, które wymagają co najmniej $(n+1)!$ mnożeń. Jest to więc metoda bardzo pracochłonna i dlatego jej się nie stosuje dla $n>4$.

Układy równań z macierzą trójkątną górną

Jeżeli macierz $\boldsymbol{A}$ układu n równań z n niewiadomymi $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ jest macierzą trójkątną górną i wszystkie elementy na przekątnej głównej są różne od zera, rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ takiego układu można otrzymać rekurencyjnie.

Przykład:

$$
\begin{array}{rrrrcr}
1x_1 & +1x_2 & -1x_3 & +4x_4 & = & 8 \\
 & -2x_2 & -3x_3 & +1x_4 & = & 5 \\
 & & 2x_3 & -3x_4 & = & 0 \\
 & & & 2x_4 & = & 4
\end{array}
$$

$$x_4 = 2 \longleftarrow 2x_4 = 4$$

Przykład:

$$
\begin{array}{rrrrcl}
1x_1 & +1x_2 & -1x_3 & & = & 0 \\
 & -2x_2 & -3x_3 & & = & 3 \\
 & & 2x_3 & & = & 6 \\
 & & & 2x_4 & = & 4
\end{array}
$$

$\mathbf{x_3 = 3} \leftarrow 2x_3 = 6$

Przykład:

$$
\begin{aligned}
1x_1 \quad +1x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 3 \\
\mathbf{x_2 = -6} \quad \longleftarrow \quad -2x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 12 \\
2x_3 \qquad\quad &= 6 \\
2x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

Przykład:

$$
\begin{array}{rrrrcr}
1x_1 & & & & = & 9 \\
 & -2x_2 & & & = & 12 \\
 & & 2x_3 & & = & 6 \\
 & & & 2x_4 & = & 4
\end{array}
$$

Układy równań z macierzą trójkątną górną

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

```
for(i = n; i>=1; i--)
    {
    x[i] = b[i] / a[i][i];
        for(j = 1; j<i; j++)
            b[j] = b[j] - x[i]*a[j][i];
    }
```

Układy równań z macierzą trójkątną dolną

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i}^{j=i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

```
for(i = 1; i<=n; i++)
     {
     x[i] = b[i] / a[i][i];
        for(j = i+1; j<=n; j++)
                b[j] = b[j] - x[i]*a[j][i];
     }
```

Układy równań z macierzą diagonalną

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Liczba operacji konieczna do przekształcenia danej macierzy do formy diagonalnej jest większa niż do formy trójkątnej.

Metoda eliminacji Gaussa

Najczęściej stosowana metoda do numerycznego rozwiązywania układu niewielu równań liniowych.

Dwa etapy:

1. Sprowadzamy układ do postaci trójkątnej górnej
2. Rozwiązujemy nowy układ tak jak na poprzednich slajdach

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}
$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$

$$- \quad m_{21}\left(\boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4}\right) = m_{21}\boxed{b_1}$$

$$0 + \underbrace{(a_{22} - m_{21}a_{12})}_{a'_{22}}x_2 + \underbrace{(a_{23} - m_{21}a_{13})}_{a'_{23}}x_3 + \underbrace{(a_{24} - m_{21}a_{14})}_{a'_{24}}x_4 = \underbrace{b_2 - m_{21}b_1}_{b'_2}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$

$$-\quad m_{31}\left(\boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4}\right) = m_{31}\boxed{b_1}$$

$$0 + \underbrace{(a_{32} - m_{31}a_{12})}_{a'_{32}}x_2 + \underbrace{(a_{33} - m_{31}a_{13})}_{a'_{33}}x_3 + \underbrace{(a_{34} - m_{31}a_{14})}_{a'_{34}}x_4 = \underbrace{b_3 - m_{31}b_1}_{b'_3}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}}$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$$

$$- \quad m_{41}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4\right) = m_{41}b_4$$

$$0 + \underbrace{(a_{42} - m_{41}a_{12})}_{a'_{42}}x_2 + \underbrace{(a_{43} - m_{41}a_{13})}_{a'_{43}}x_3 + \underbrace{(a_{44} - m_{41}a_{14})}_{a'_{44}}x_4 = \underbrace{b_4 - m_{41}b_1}_{b'_4}$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}
$$

$$m_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

$$a'_{32}\,x_2 + a'_{33}\,x_3 + a'_{34}\,x_4 = b'_3$$

$$-$$

$$m_{32}\left(a'_{22}\,x_2 + a'_{23}\,x_3 + a'_{24}\,x_4\right) = m_{32} b'_2$$

$$0 + \underbrace{(a'_{33} - m_{32} a'_{23})}_{a''_{33}} x_3 + \underbrace{(a'_{34} - m_{32} a'_{24})}_{a''_{34}} x_4 = \underbrace{b'_3 - m_{32} b'_2}_{b''_3}$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{bmatrix}
$$

$$
m_{42} = \frac{a'_{42}}{a'_{22}}
$$

$$
a'_{42}\,x_2 + a'_{43}\,x_3 + a'_{44}\,x_4 = b'_4
$$

$$
-\quad m_{42}\left(\boxed{a'_{22}\,x_2 + a'_{23}\,x_3 + a'_{24}\,x_4}\right) = m_{42}\boxed{b'_2}
$$

$$
\mathbf{0} + \underbrace{(a'_{43} - m_{42}a'_{23})}_{a''_{43}}x_3 + \underbrace{(a'_{44} - m_{42}a'_{24})}_{a''_{44}}x_4 = \underbrace{b'_4 - m_{42}b'_2}_{b''_4}
$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{bmatrix}$$

$$m_{43} = \frac{a''_{43}}{a''_{33}}$$

$$a''_{43}\, x_3 + a''_{44}\, x_4 = b''_4$$

$$m_{43}\left(a''_{33}\, x_3 + a''_{34}\, x_4\right) = m_{43} b''_3$$

$$0 + (\underbrace{a''_{44} - m_{43} a''_{34}}_{a'''_{44}})x_4 = \underbrace{b''_4 - m_{43} b''_3}_{b'''_4}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'''_4 \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy zatem układ równań z macierzą trójkątną górną.

Dalej postępujemy zgodnie z algorytmem dla macierzy trójkątnych.

Metoda Gaussa: uwagi

Układ postaci:

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 46 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$$

nie może być rozwiązany przy pomocy metody Gaussa – element podstawowy w pierwszym równaniu równy jest zero.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 16 \\ 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 46 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$$

Wniosek: Należy tak przestawić równania, by element podstawowy był jak największy.

Metoda Gaussa: uwagi

Robimy tak nie tylko wtedy, gdy element podstawowy jest równy zeru.

Zawsze wybieramy równanie podstawowe z największym elementem podstawowym. W przeciwnym wypadku rozwiązanie może być obarczone dużym błędem zaokrągleń.

Po każdym etapie algorytmu, równania są modyfikowane – zatem za każdym razem należy sprawdzić, które z równań najbardziej nadaje się na równanie podstawowe.

Jeśli układ równań ma rozwiązania (nie jest sprzeczny), to zawsze można znaleźć równanie podstawowe z niezerowym elementem podstawowym.

W metodzie Gaussa należy wykonać łącznie $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$ mnożeń i dzieleń.

Za pomocą wzorów Cramera $(n+1)!$ mnożeń.

Dla 15 równań – $16! = 20922789888000$ $15^3 = 3375$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

Podobna do metody Gaussa. Dążymy do uzyskania macierzy diagonalnej.

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}
$$

Macierz rozszerzona:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}
$$

Przykład:

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 12 \\
-6x_1 + 7x_2 + 6.5x_3 &= -6 \\
x_1 + 7.5x_2 + 6.25x_3 &= 16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & 12 \\ -6 & 7 & 6.5 & -6 \\ 1 & 7.5 & 6.25 & 16 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} \frac{4}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{12}{4} \\ -6 & 7 & 6.5 & -6 \\ 1 & 7.5 & 6.25 & 16 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.75 & 3 \\ -6 & 7 & 6.5 & -6 \\ 1 & 7.5 & 6.25 & 16 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ -(-6)*\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.75 & 3 \end{bmatrix} \\ -1*\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.75 & 3 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.75 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \\ 0 & 8 & 7 & 13 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.75 & 3 \\ 0 & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{12}{4} \\ 0 & 8 & 7 & 13 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.75 & 3 \\ 0 & 1 & 0.5 & 3 \\ 0 & 8 & 7 & 13 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} -(-0.5)*\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 3 \end{bmatrix} \\ \\ -8*\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 3 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & 4.5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & 4.5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{3} & -\frac{11}{3} \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & 4.5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix}
\begin{array}{l} -(-0.5)*\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \\ -0.5*\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \\ \\ \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1 &= 16/6 \\
x_2 &= 29/6 \\
x_3 &= -11/3
\end{aligned}
$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana: uwagi

Łatwo uogólnić do rozwiązywania kilku układów równań jednocześnie:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 & c_2 & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} & b_n & c_n & d_n \end{array}\right]$$

Należy pamiętać o właściwym wyborze równania podstawowego (jak w metodzie Gaussa)

Liczba działań około 1.5 razy większa niż w metodzie Gaussa

Rozkład macierzy LU

Dany jest układ $[A][x] = [b]$.

Macierz trójkątna dolna (***L**ower*)

Przedstawmy macierz $[A]$ jako iloczyn: $[A] = [L]\,[U]$.

Macierz trójkątna górna (***U**pper*)

Zatem:

$$[L][U][x] = [b]$$

Niech:

$$[U][x] = [y]$$

$$[L][y] = [b]$$

Czyli rozwiązanie problemu dwuetapowe:

1. Znajdujemy $[y]$ (korzystając ze wzorów na układy równań z macierzą trójkątną dolną)
2. Znajdujemy $[x]$ (korzystając ze wzorów na układy równań z macierzą trójkątną górną)

Metoda Doolittle'a

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$[A]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{bmatrix}$$

wiersz 1: $u_{11}=a_{11}$; $u_{12}=a_{12}$; $u_{13}=a_{13}$; $u_{14}=a_{14}$

Kolumna 1: $l_{21}=a_{21}/u_{11}$; $l_{31}=a_{31}/u_{11}$; $l_{41}=a_{41}/u_{11}$

Metoda Doolittle'a

$$[A]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{bmatrix}$$

Wiersz 2: $l_{21}u_{12}+u_{22}=a_{22};\quad l_{21}u_{13}+u_{23}=a_{23};\quad l_{21}u_{14}+u_{24}=a_{24}$

$$\begin{cases} u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12} \\ u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13} \\ u_{24}=a_{24}-l_{21}u_{14} \end{cases}$$

Kolumna 2: $l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}=a_{32};\quad l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22}=a_{42}$

$$\begin{cases} l_{32}=(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22} \\ l_{42}=(a_{42}-l_{41}u_{12})/u_{22} \end{cases}$$

Metoda Doolittle'a

$$[A]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{bmatrix}$$

Wiersz 3: $l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=a_{33}; \quad l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34}=a_{34}$

$$\begin{cases} u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23} \\ u_{34}=a_{34}-l_{31}u_{14}-l_{32}u_{24} \end{cases}$$

Kolumna 3: $l_{43}=(a_{43}-l_{41}u_{13}-l_{42}u_{23})/u_{33}$

Wiersz 4: $u_{44}=a_{44}-l_{41}u_{14}-l_{42}u_{24}-l_{43}u_{34}$

Metoda Doolittle'a – algorytm:

```
for i = 1 … n
        {
        L_ii = 1
        for j = 1 … i
```

$$U_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk} U_{ki}$$

```
        for j = i+1 … n
```

$$L_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} U_{ki}}{U_{ii}}$$

```
        }
```

```
for i = 1 … n
        {
        for j = 1 … i
```

$$a_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} a_{ki}$$

```
        for j = i+1 … n
```

$$a_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{jk} a_{ki}}{a_{ii}}$$

```
        }
```

Każdy element a_{ij} potrzebny jest tylko raz, zatem możemy wykorzystać jego miejsce w macierzy (tablicy) na przechowanie wartości L_{ij} lub U_{ij}.

Rozkład LU: uwagi

Pamiętajmy o wyborze równania podstawowego.
Trzeba zapamiętać permutacje wierszy macierzy $\boldsymbol{A}$, by po zakończeniu działania algorytmu dostosować położenie elementów kolumny wyrazów wolnych.

Rozkład LU można stosować do równoczesnego rozwiązywania wielu układów równań różniących się jedynie wektorami wyrazów wolnych.

Odwracanie macierzy

$$[A][A]^{-1}=[I]$$

Zatem należy rozwiązać układ:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dostajemy cztery układy równań różniące się tylko kolumną wyrazów wolnych

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Doskonale nadaje się to tego celu rozkład LU.

Metody iteracyjne

Analogia do rozwiązania równań nieliniowych metodą szukania punktu stałego.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \left[b_1 - \left(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4\right)\right] / a_{11} \\ x_2 &= \left[b_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4\right)\right] / a_{22} \\ x_3 &= \left[b_3 - \left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4\right)\right] / a_{33} \\ x_4 &= \left[b_4 - \left(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3\right)\right] / a_{44} \end{aligned}$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \ \text{dla } i \neq j \qquad \alpha_{ij} = 0 \ \text{dla } i = j$$

Układ można zapisać w postaci macierzowej

$$\vec{x} = \vec{\beta} + \hat{\alpha} \cdot \vec{x}$$

Metoda Jacobiego

Jako rozwiązanie początkowe, obiera się dowolny wektor (np. wektor zerowy) i oblicza się kolejne iteracje:

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{\beta} + \hat{\alpha}\vec{x}^{(0)}$$
$$\vec{x}^{(2)} = \vec{\beta} + \hat{\alpha}\vec{x}^{(1)} \quad \Longleftrightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right] \quad i = 1,2,\ldots,n$$
$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{\beta} + \hat{\alpha}\vec{x}^{(k)} \qquad (*)$$

Kolejne przybliżenia $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ utworzą ciąg wektorów. Jeżeli istnieje granica tego ciągu, wtedy jest ona rozwiązaniem układu równań liniowych. Ciąg wektorów musi być zatem ciągiem zbieżnym.

$\rho(\hat{\alpha}) = max\ |\lambda_i|$ (promień spektralny macierzy $\hat{\alpha}$), λ_i – wartości własne macierzy $\hat{\alpha}$.

Tw. Ciąg określony wzorem $(*)$ przy dowolnym wektorze $x^{(0)}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(\hat{\alpha}) < 1$.

Znalezienie wartości własnych jest pracochłonne. Stosuje się często mniej szerokie, ale również wystarczające kryteria, takie jak np.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Warunek wystarczający (nie konieczny)

Macierze przekątniowo dominujące

Metoda Gaussa-Seidela

Podobna do metody Jacobiego, ale tu wyznaczając w jednym kroku iteracyjnym kolejne elementy wektora $x^{(k+1)}$, korzystamy zarówno z wartości wektora $x^{(k)}$ jak i z wyznaczonych już elementów wektora $x^{(k+1)}$.

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= f\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} &= f\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} &= f\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

Metoda szybciej zbieżna (zwykle kilka iteracji wystarczy do uzyskania zadowalającej dokładności rozwiązań).

Metody dokładne są ogromnie czasochłonne dla n dużych (np. > 100) i podatne na błędy.

Wiele problemów fizycznych opisanych jest przez macierze przekątniowo dominujące (np. równanie Laplace'a).

Dla macierzy rzadkich metody iteracyjne oszczędzają pamięć i liczbę obliczeń.

Czy poniższy układ równań może być rozwiązany za pomocą metody Gaussa-Seidla?

$$[A]=\begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

$$|a_{11}| = |12| = 12 > |a_{12}| + |a_{13}| = |3| + |-5| = 8$$

$$|a_{22}| = |5| = 5 > |a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |3| = 4$$

$$|a_{33}| = |13| = 13 > |a_{31}| + |a_{32}| = |3| + |7| = 10$$

Czy poniższy układ równań może być rozwiązany za pomocą metody Gaussa-Seidla?

$$[A]=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 1 & 5 & 3 \\ 12 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Tak, ale trzeba zmienić kolejność wierszy.

Metoda	Stabilność	Precyzja	Zastosowania	Złożoność	Uwagi
Graficzna	-------------	Słaba	Ograniczone	------------	Przydatna do wizualizacji
Reguła Cramera	-------------	Czuła na błędy zaokrągleń	Ograniczone	------------	Nieprzydatna dla trzech lub więcej równań
Eliminacja Gaussa	-------------	Czuła na błędy zaokrągleń	Ogólne	Średnia	
Rozkład LU	-------------	Czuła na błędy zaokrągleń	Ogólne	Średnia	Metoda preferowana, pozwala obliczać odwrotności macierzy
Gauss-Seidel	Może być rozbieżna, jeśli macierz nie dominująca przekątniowo	Doskonała	Tylko dla układów z macierzą dominującą przekątniowo	Łatwa	