

# Metody numeryczne

Wykład nr 2

dr hab. Piotr Fronczak

# Przybliżone rozwiązywanie równań nieliniowych

## Jedno równanie z jedną niewiadomą

Szukamy pierwiastków rzeczywistych równania  $f(x) = 0$ .

$f(x)$  zwykle jest funkcją nieliniową, zatem korzystamy z metod iteracyjnych (poprawianie kolejnych przybliżeń pierwiastków)

# Wykładnik zbieżności

- Określa szybkość zbieżności metod iteracyjnych
- Metoda jest rzędu  $p$ , jeżeli istnieje stała  $c$  taka, że dla dwóch kolejnych przybliżeń  $x_k$  i  $x_{k+1}$  zachodzi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p} = c$$

gdzie  $\varepsilon_k = x_{k+1} - x_k$ .

Przypadki specjalne

$p=1$  (metoda liniowa),

$p>1$  &  $p<2$  (metoda superliniowa)

$p=2$  (metoda kwadratowa),

$p=3$  (metoda kubiczna)

## Zbieżność

- 1  $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5} \dots$  liniowa z  $C = 10^{-1}$
- 2  $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8} \dots$  liniowa z  $C = 10^{-2}$
- 3  $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-8} \dots$  superliniowa
- 4  $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16} \dots$  kwadratowa

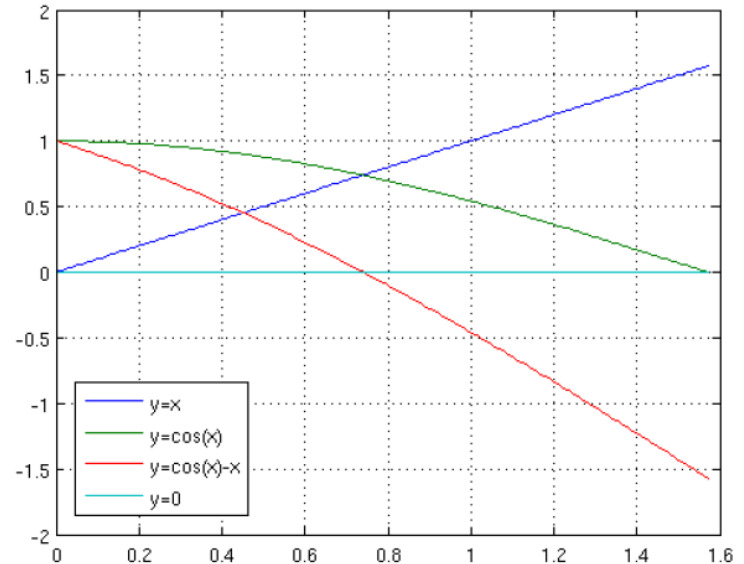
# Kroki podstawowe

1. Przeanalizuj problem pod kątem

- złożoności badanej funkcji
- dokładności rozwiązań
- szybkości obliczeń

2. Jeśli to możliwe, narysuj funkcję

$$f(x) = \cos(x) - x$$



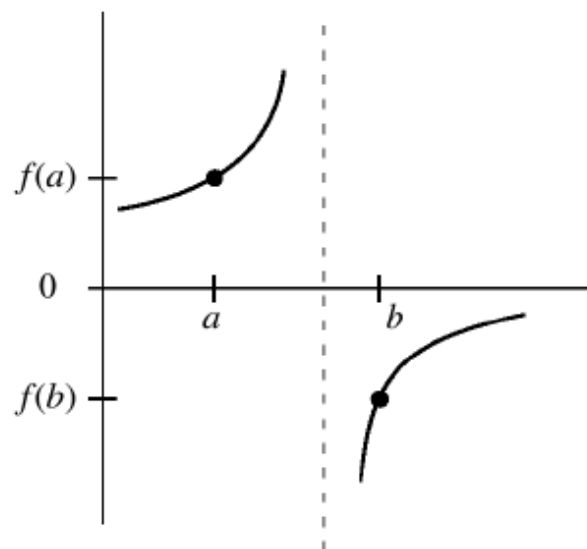
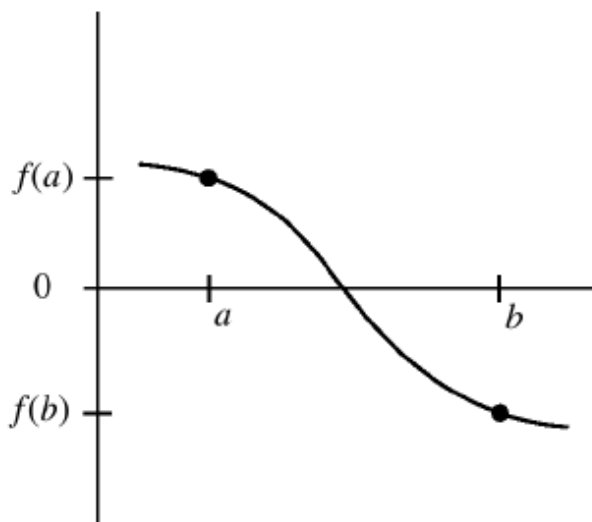
3. Oceń problemy (np. rozbieżność funkcji)

4. Wybierz rozwiązanie początkowe

# Metoda bisekcji (połowienia)

Wybieramy przedział domknięty  $\langle a, b \rangle$ , wewnątrz którego znajduje się pierwiastek i na którego końcach wartości funkcji  $f(x)$  mają przeciwne znaki

$$f(a)f(b) < 0$$



**UWAGA!**

# Metoda bisekcji (połowienia)

1. Wybieramy przedział  $\langle a, b \rangle$ , tak by  $f(a)f(b) < 0$
2. Dzielimy przedział na połowy:

$$x_0 = a + \frac{b - a}{2}$$

3. Mamy trzy przypadki:

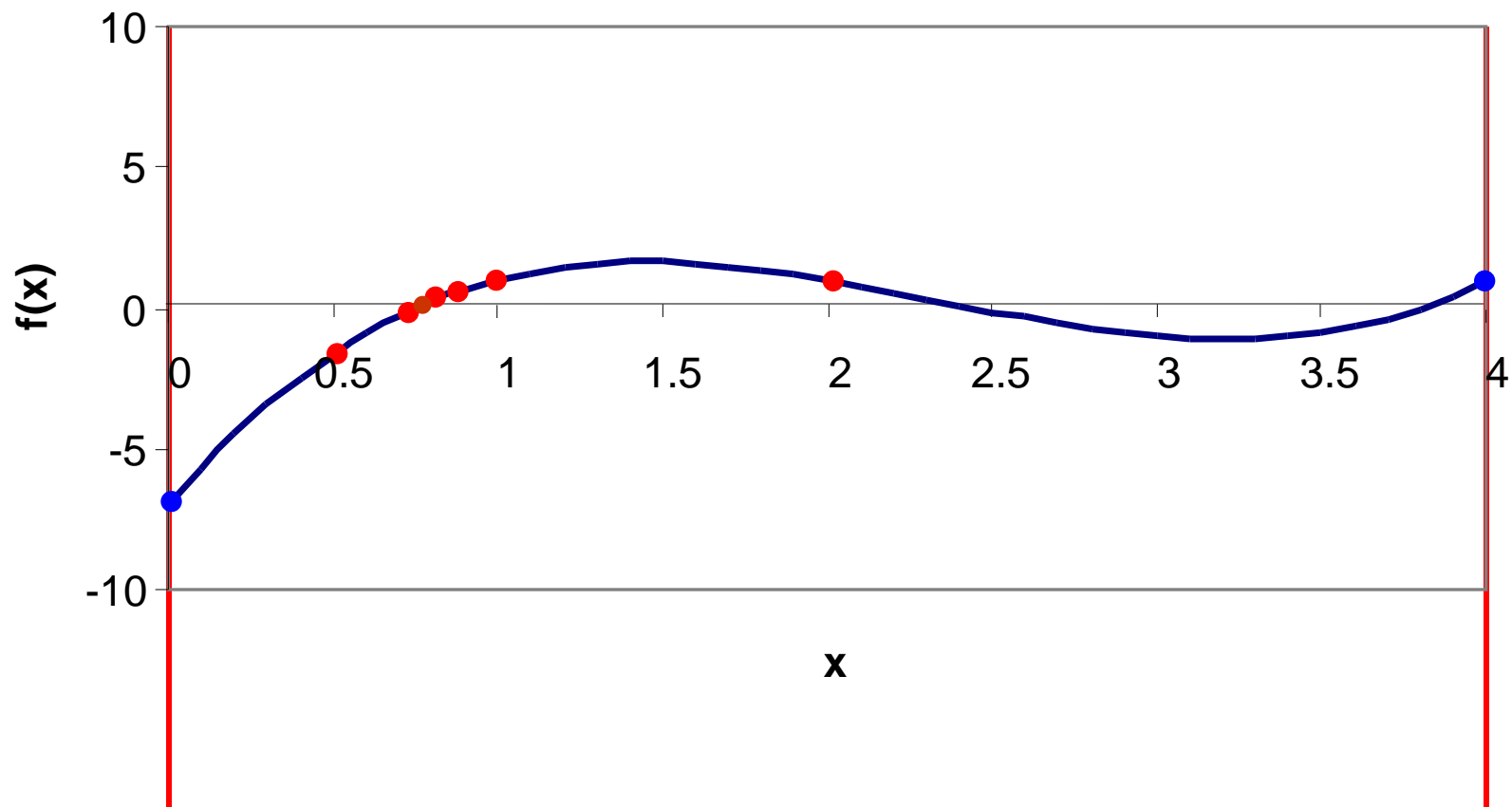
*$f(x_0) = 0$ , znaleziono pierwiastek*

*$f(x_0)$  ma ten sam znak co  $f(a)$  zatem pierwiastek  
jest w przedziale  $(x_0, b)$*

*$f(x_0)$  ma ten sam znak co  $f(b)$  zatem pierwiastek  
jest w przedziale  $(a, x_0)$*

4. Wybieramy przedział zawierający pierwiastek jako nowy przedział  $\langle a; b \rangle$  i wracamy do kroku 2.

# Metoda bisekcji: przykład



# Metoda bisekcji (połowienia): uwagi

- Metoda zawsze zbieżna, jeśli tylko dobrze wybrano przedział początkowy.
- Metoda zawiedzie, gdy  $f(x)$  styczne z osią  $x$  dla  $f(x)=0$ .
- Wolna zbieżność  $p=1$  (metoda liniowa)
  
- Po  $k$  iteracjach rozmiar przedziału zmalał do:

$$\varepsilon_0 = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

- Zatem liczba iteracji konieczna do uzyskania tolerancji błędu  $\varepsilon_0$ :

$$k = \log_2 \left( \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon_0} \right)$$



# Metoda Regula Falsi

- Opisana w hinduskim tekście *Vaishali Ganit* (III w. p.n.e.)
- *Dziewięć rozdziałów sztuki matematycznej* (九章算術) (200 p.n.e. – 100 n.e.) wykorzystuje algorytm do rozwiązywania równań liniowych
- *regula* – linia, *falsus* - fałszywy

# Metoda Regula Falsi

1. Wybierz przedział  $\langle a, b \rangle$ , tak by  $f(a)f(b) < 0$
2. Przybliżenie pierwiastka: punkt, w którym prosta łącząca punkty  $a$  i  $b$  przecina oś  $x$ .

równanie prostej: 
$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)$$

Stąd, gdy  $y=0$ , mamy: 
$$x_{app} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

3. Mamy trzy przypadki:

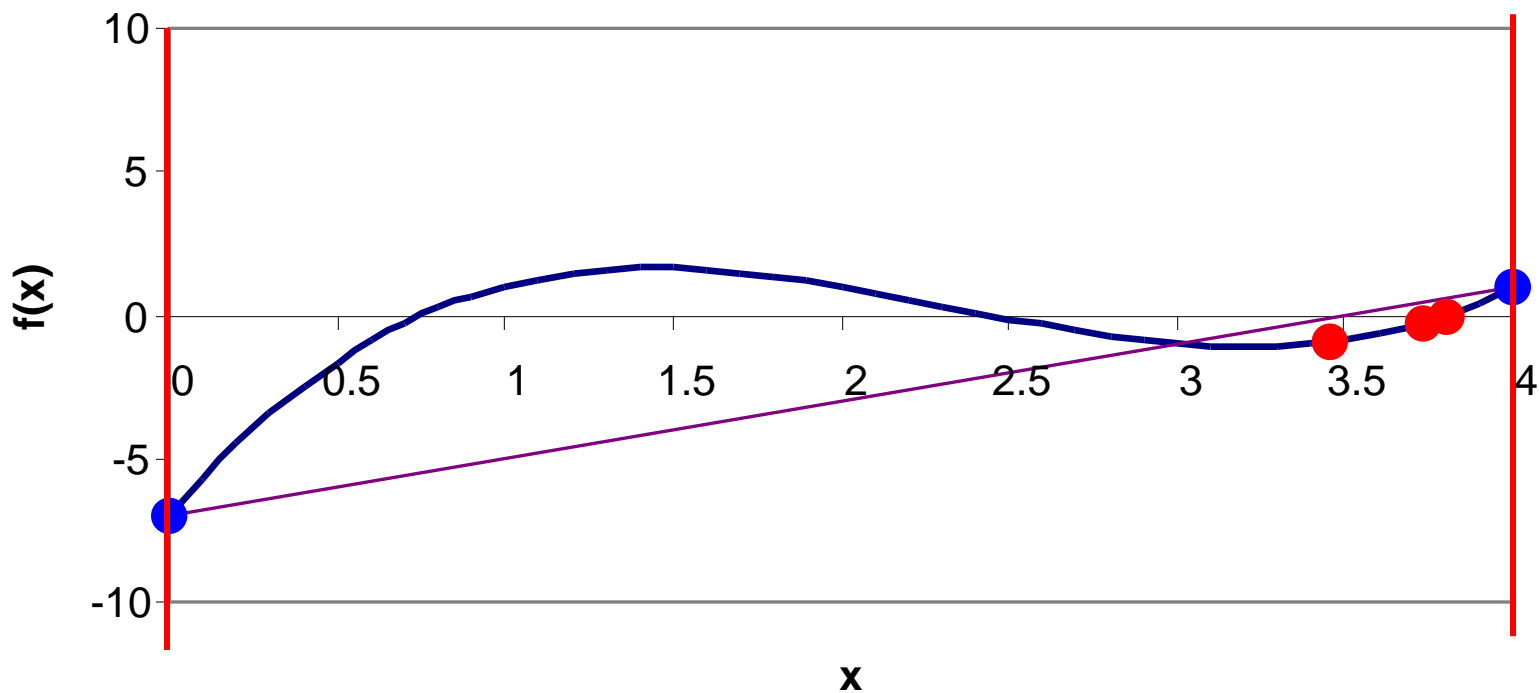
*$f(x_{app}) = 0$ , znaleziono pierwiastek*

*$f(x_{app})$  ma ten sam znak co  $f(a)$  zatem pierwiastek  
jest w przedziale  $(x_{app}, b)$*

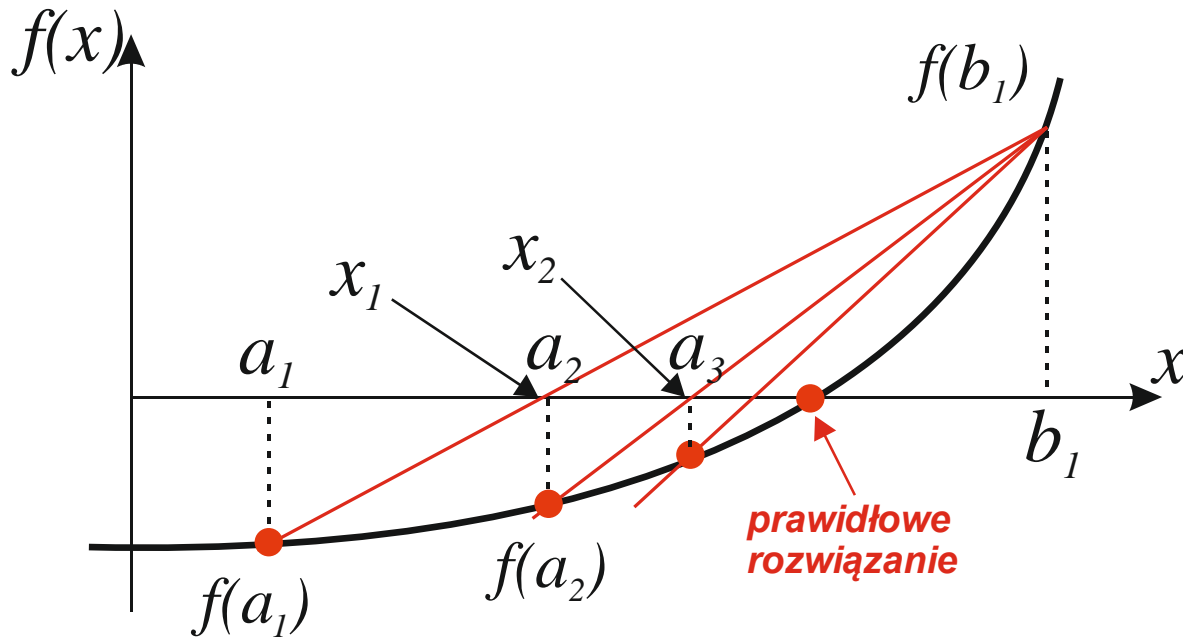
*$f(x_{app})$  ma ten sam znak co  $f(b)$  zatem pierwiastek  
jest w przedziale  $(a, x_{app})$*

4. Wybierz przedział zawierający pierwiastek jako nowy przedział  $\langle a, b \rangle$  i wróć do kroku 2.

# Metoda Regula Falsi: przykład

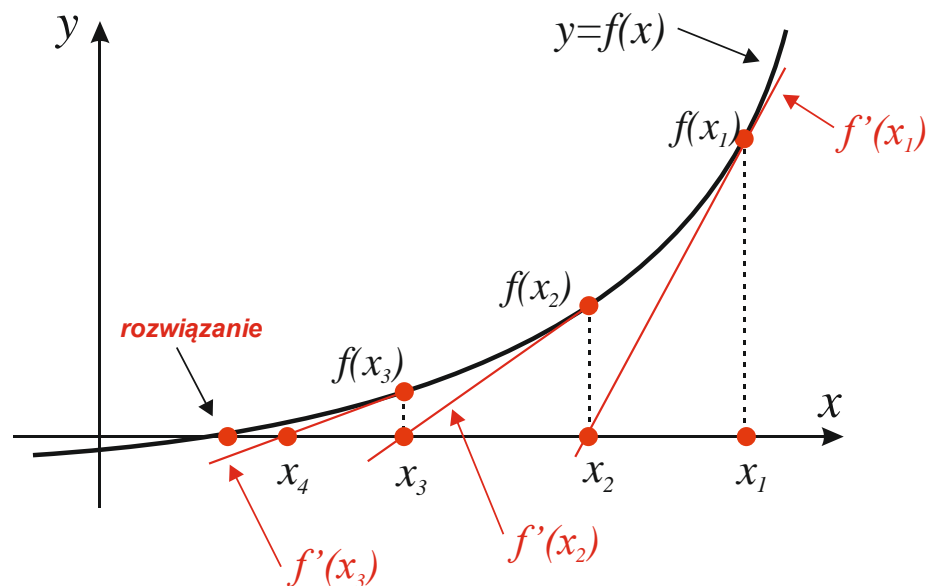


# Metoda Regula Falsi: uwagi



- Metoda zawsze zbieżna, jeśli tylko dobrze wybrano przedział początkowy.
- Metoda zawiedzie, gdy  $f(x)$  styczne z osią  $x$  dla  $f(x)=0$ .
- Wolna zbieżność  $p=1$  (metoda liniowa)

# Metoda Newtona



Wybierzmy pewien punkt początkowy  $x_k$  i rozwińmy funkcję  $f(x)$  w szereg Taylora

$$f(x_k + \Delta x) = f(x_k) + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_k} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_k} + \dots$$

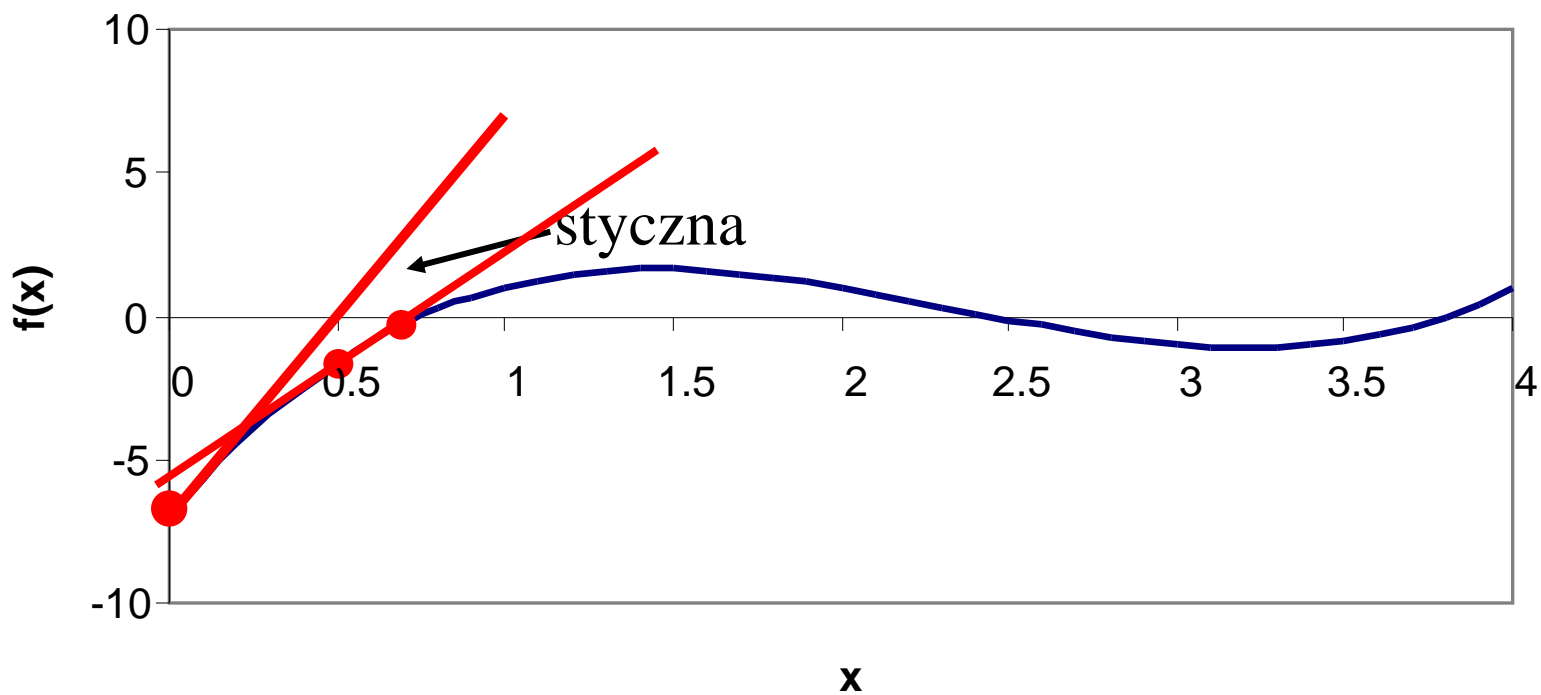
Podstawmy  $\Delta x = x_{k+1} - x_k$  i weźmy tylko dwa wyrazy rozwinięcia:

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k)$$

Niech  $f(x_{k+1}) = 0$ . Wtedy

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

# Metoda Newtona: przykład



# Metoda Newtona: przykład c.d.

Szukamy pierwiastków  $x - x^{1/3} - 2 = 0$

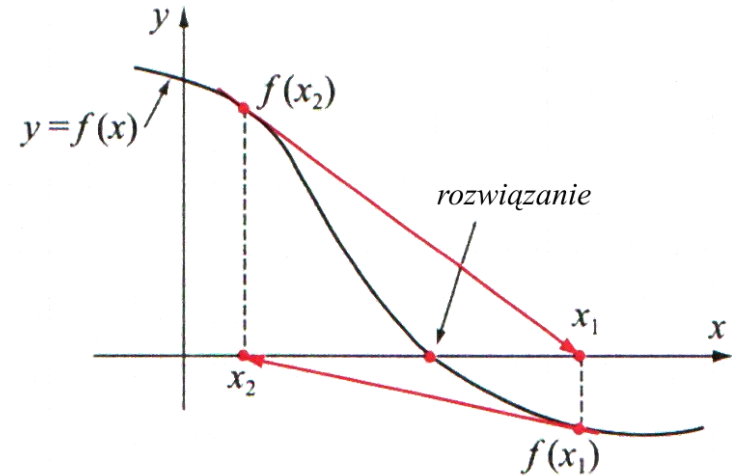
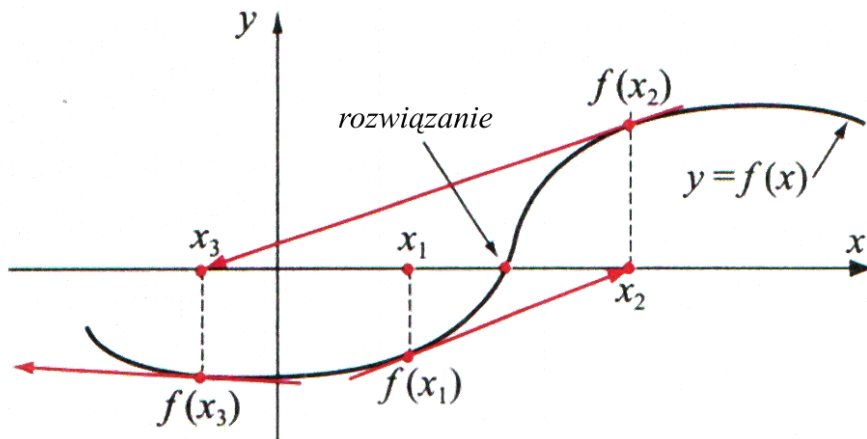
Liczmy pochodną  $f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^{-2/3}$

Równanie iteracyjne  $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}}$

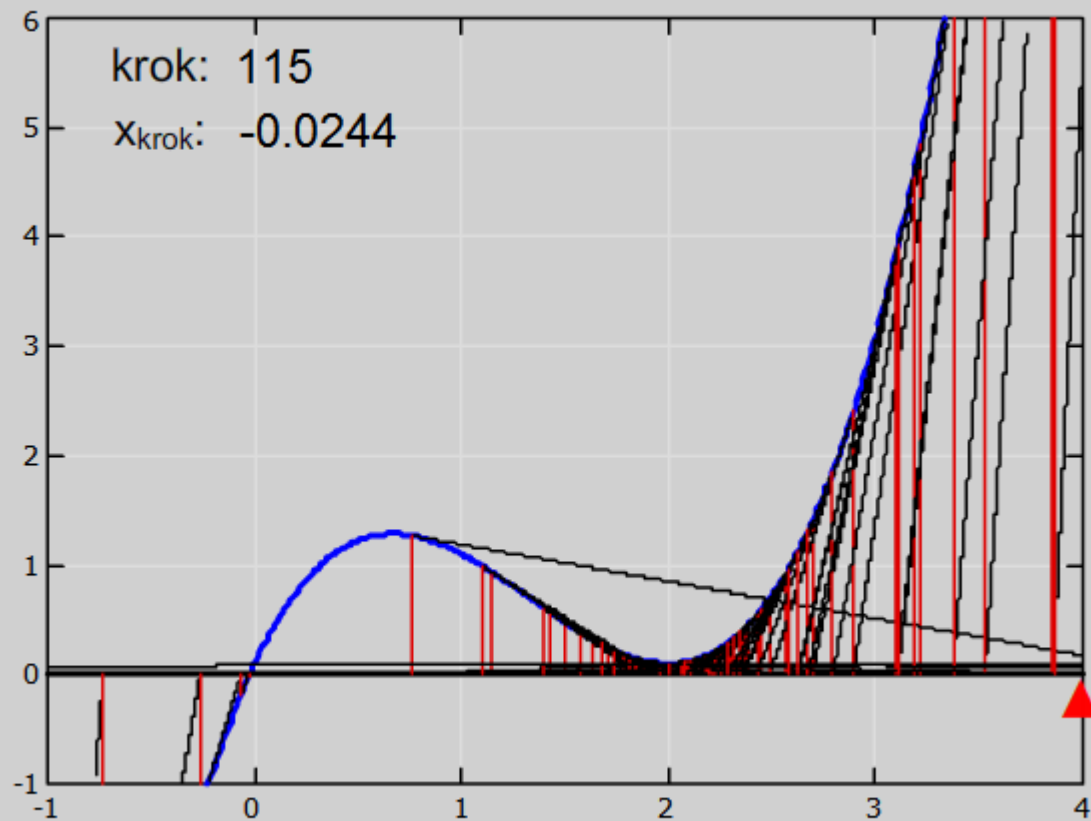
$k$	$x_k$	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	-0.44224957
1	3.52664429	0.85612976	0.00450679
2	3.52138015	0.85598641	$3.771 \times 10^{-7}$
3	3.52137971	0.85598640	$2.664 \times 10^{-15}$
4	3.52137971	0.85598640	0.0

# Metoda Newtona: uwagi

- Szybka zbieżność  $p=2$  (metoda kwadratowa)
- Wymaga analitycznej znajomości  $f'(x)$
- Metoda zbieżna, gdy  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  ciągle,  $f'(x) \neq 0$  w pobliżu rozwiązania, początkowa wartość  $x_1$  leży blisko rozwiązania

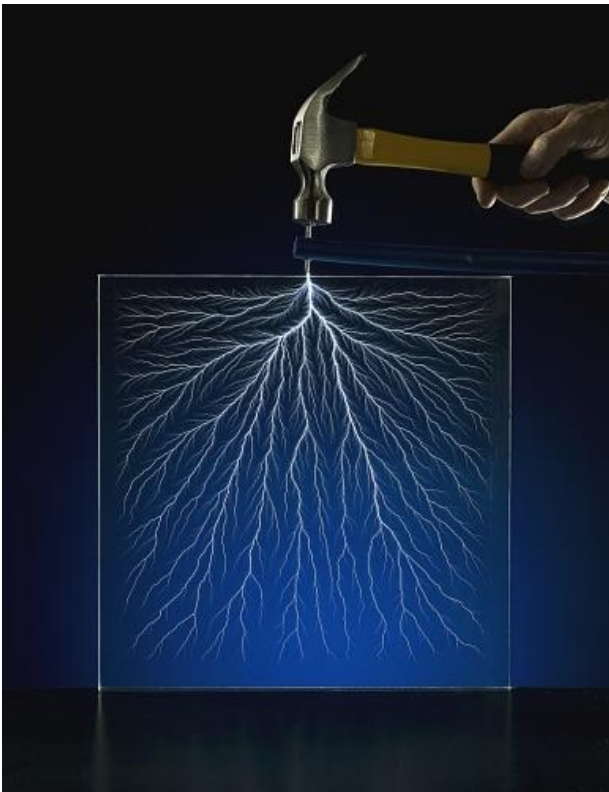






# Fraktale

- mają nietrywialną strukturę w każdej skali,
- struktura ta nie daje się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej,
- są samo-podobny,
- mają wymiar wymierny (fractional) a nie całkowity



**obraz Lichtenberga:  
wyładowanie elektryczne w dielektryku.**

**Brokuł romanesco**



**Drzewo**

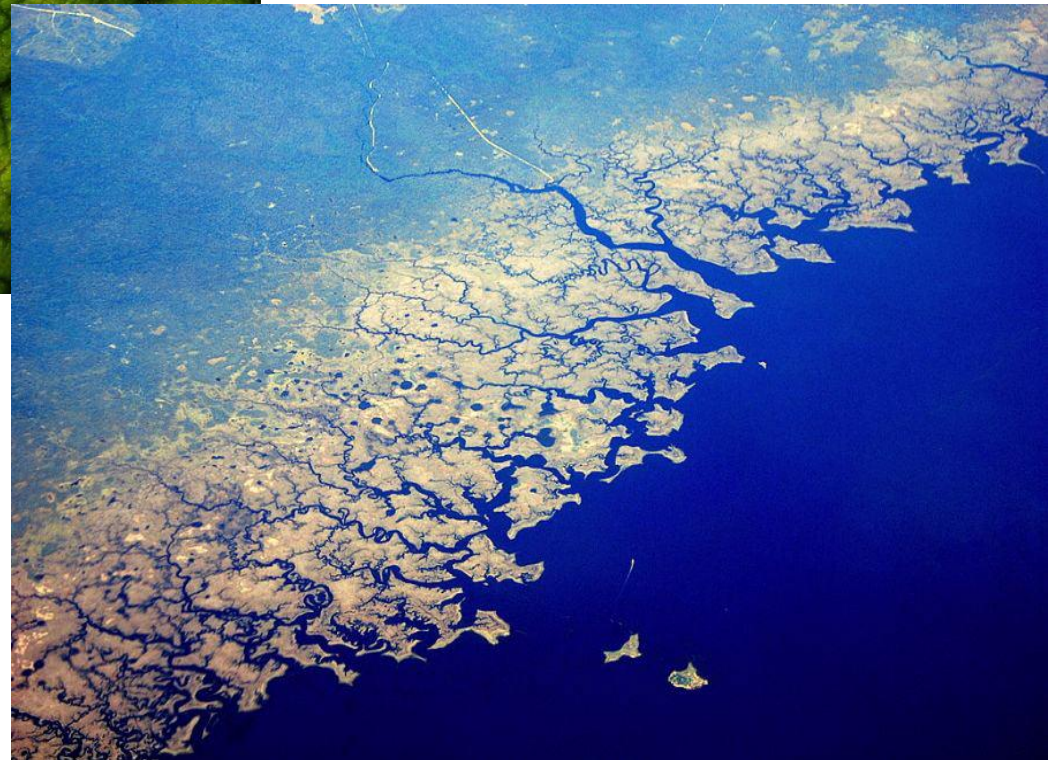




**Liście**



**Linia brzegowa**



# Fraktale Newtona

Weźmy równanie  $f(z) = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , np.  $z^3 - 1 = 0$

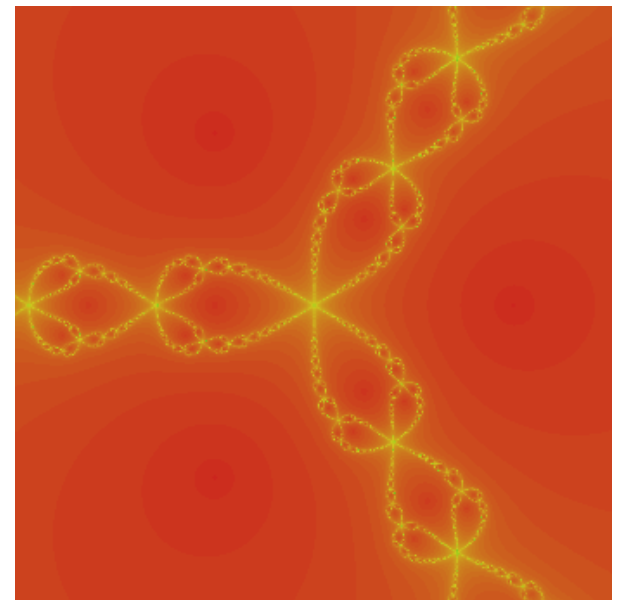
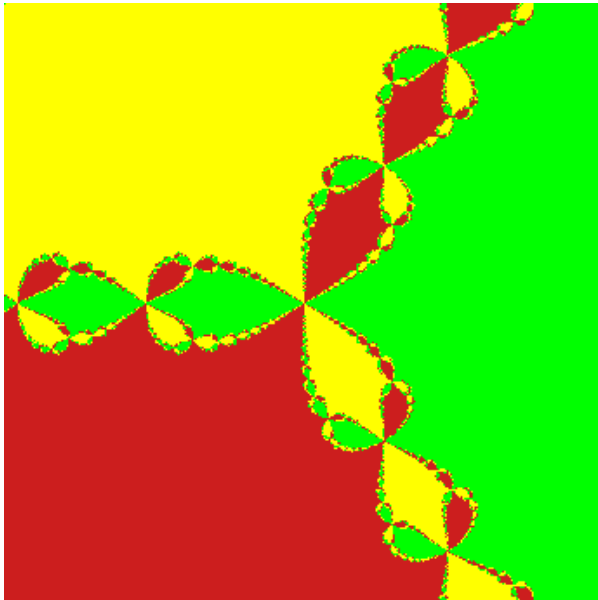
Równanie zespolone stopnia  $n$  ma  $n$  pierwiastków.

W zależności od wyboru punktu warunku początkowego  $(x + iy)$  metoda Newtona doprowadzi nas do jednego z  $n$  pierwiastków.

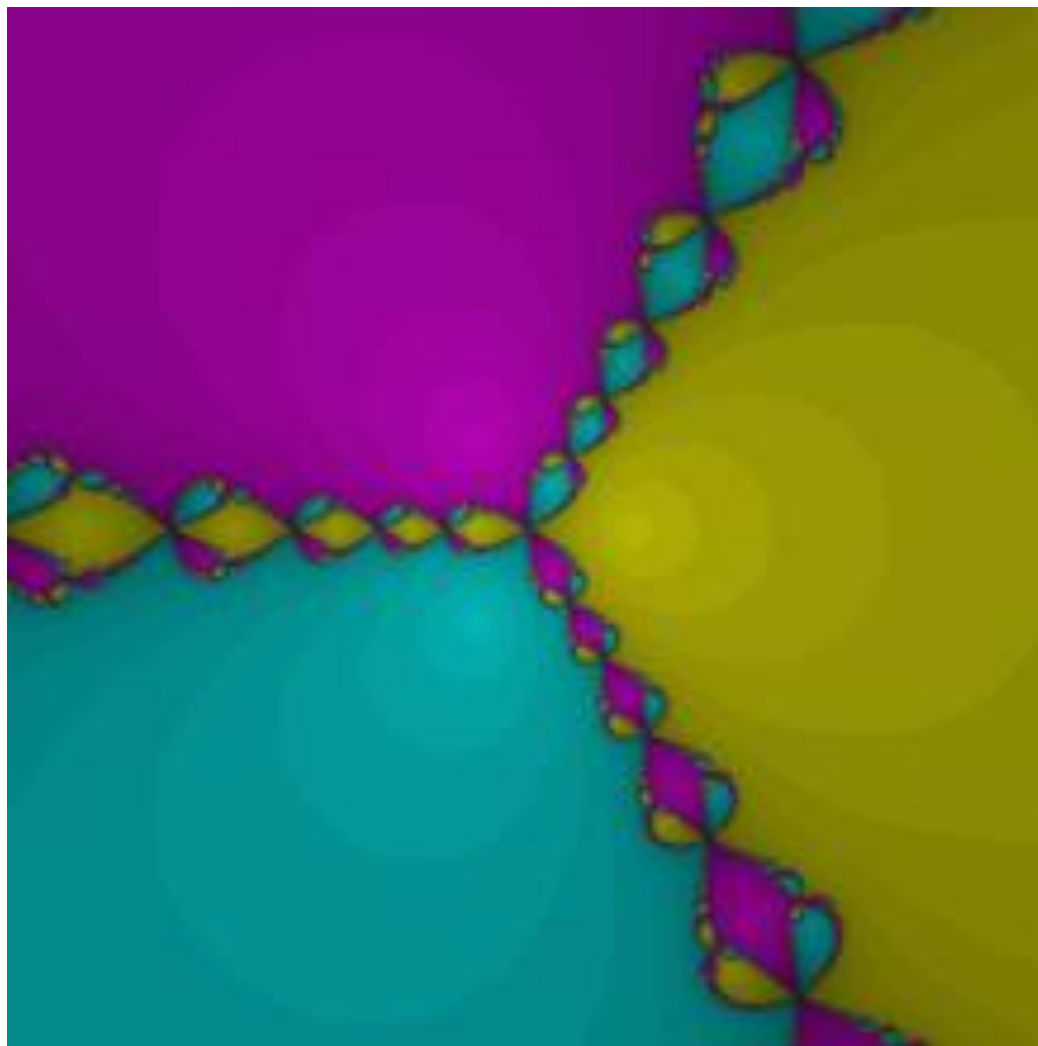
Punkty te następnie oznacza się różnym kolorem w zależności od:

rozwiązania, do którego dąży dany punkt:

prędkości znalezienia rozwiązania:



... lub oba warunki naraz:



# Metoda siecznych

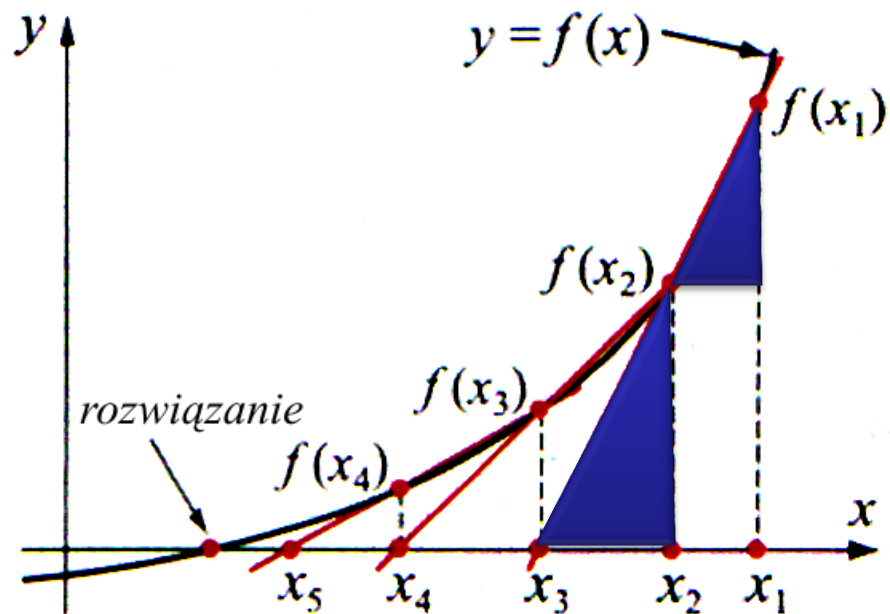
Do wyznaczenia  $k+1$  przybliżenia korzystamy z punktów  $k-1$  i  $k$ .

Korzystając z podobieństwa trójkątów:

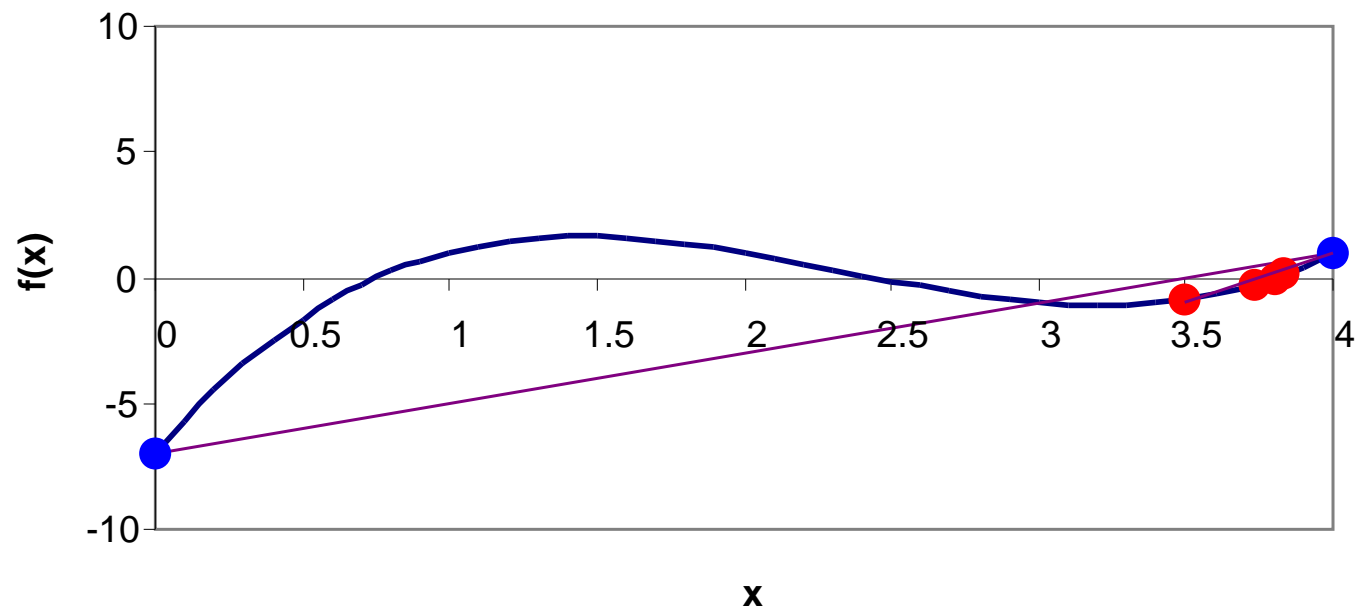
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - 0}{x_2 - x_3}$$

Stąd 
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

Ogólnie 
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}$$



# Metoda siecznych: przykład





# Metoda siecznych: uwagi

Metoda między Regula falsi a Newtona

Zbieżność szybsza niż liniowa  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \iff x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{(x_{k-1} - x_k)}}$$

**Przybliżenie pochodnej**

**Nie musimy znać analitycznej postaci  $f'(x)$  !**

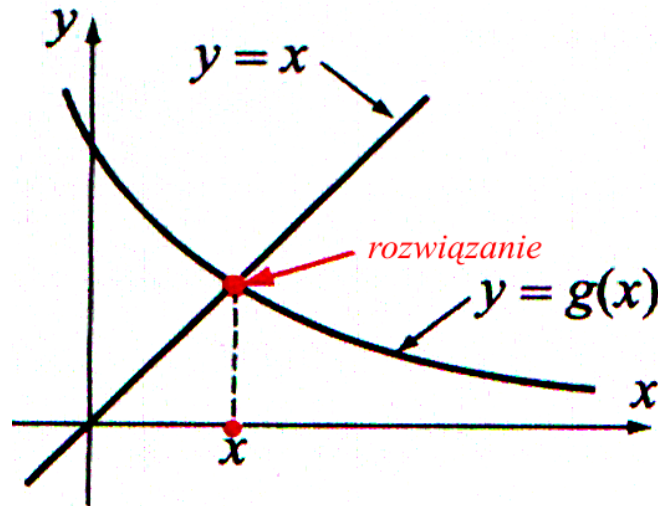
Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Ale te same problemy ze zbieżnością co w metodzie Newtona.  
Najpierw wolna ale pewna bisekcja, potem szybka metoda siecznych.

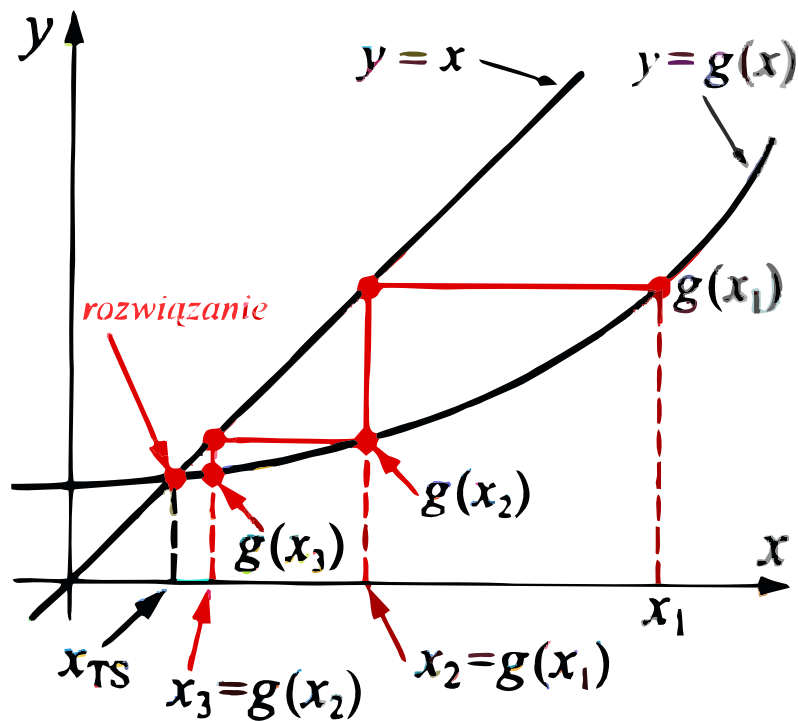
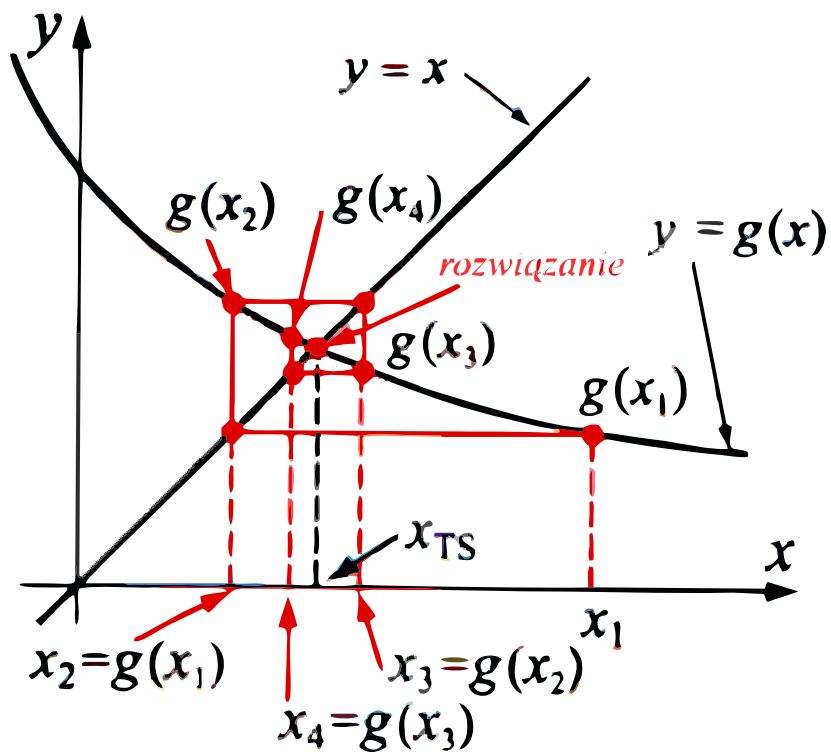
# Metoda szukania punktu stałego

Równanie  $f(x) = 0$  zastępujemy równaniem  $x - g(x) = 0$ , czyli  $x = g(x)$



Rozwiązania szukamy iteracyjnie:  $x_{k+1} = g(x_k)$

# Metoda szukania punktu stałego



# Metoda szukania punktu stałego: przykład

$$x - x^{1/3} - 2 = 0$$

Trzy sposoby zapisu:

$$x_{k+1} = g_1(x_k) = x_k^{1/3} + 2$$

$$x_{k+1} = g_2(x_k) = (x_k - 2)^3$$

$$x_{k+1} = g_3(x_k) = \frac{6 + 2x_k^{1/3}}{3 - x_k^{2/3}}$$

Czy jest jakaś różnica?

$k$	$g_1(x_{k-1})$	$g_2(x_{k-1})$	$g_3(x_{k-1})$
0	3	3	3
1	3.4422495703	1	3.5266442931
2	3.5098974493	-1	3.5213801474
3	3.5197243050	-27	3.5213797068
4	3.5211412691	-24389	3.5213797068
5	3.5213453678	$-1.451 \times 10^{13}$	3.5213797068
6	3.5213747615	$-3.055 \times 10^{39}$	3.5213797068
7	3.5213789946	$-2.852 \times 10^{118}$	3.5213797068
8	3.5213796042	$\infty$	3.5213797068
9	3.5213796920	$\infty$	3.5213797068

**zbieżność**    **rozbieżność**    **szybka zbieżność**

# Metoda szukania punktu stałego: zbieżność

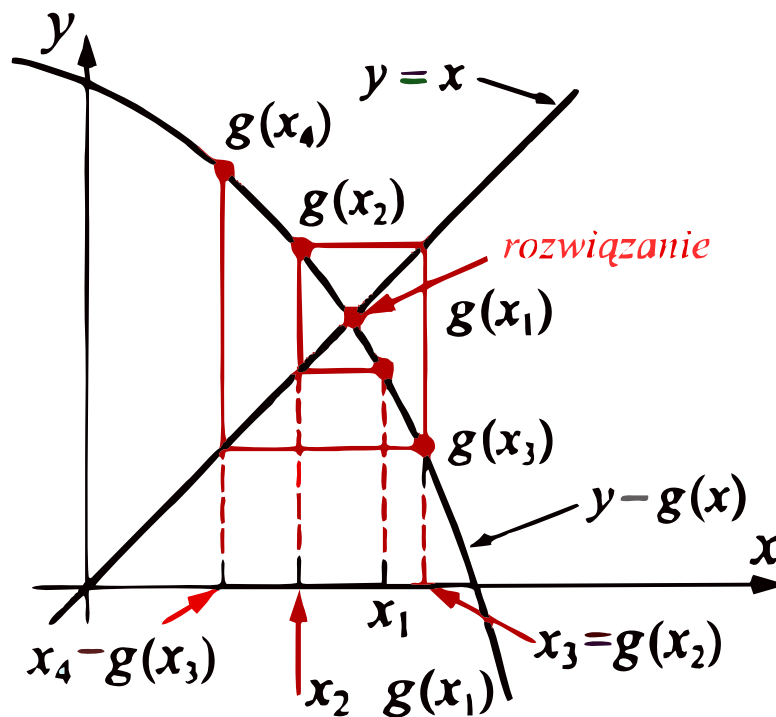
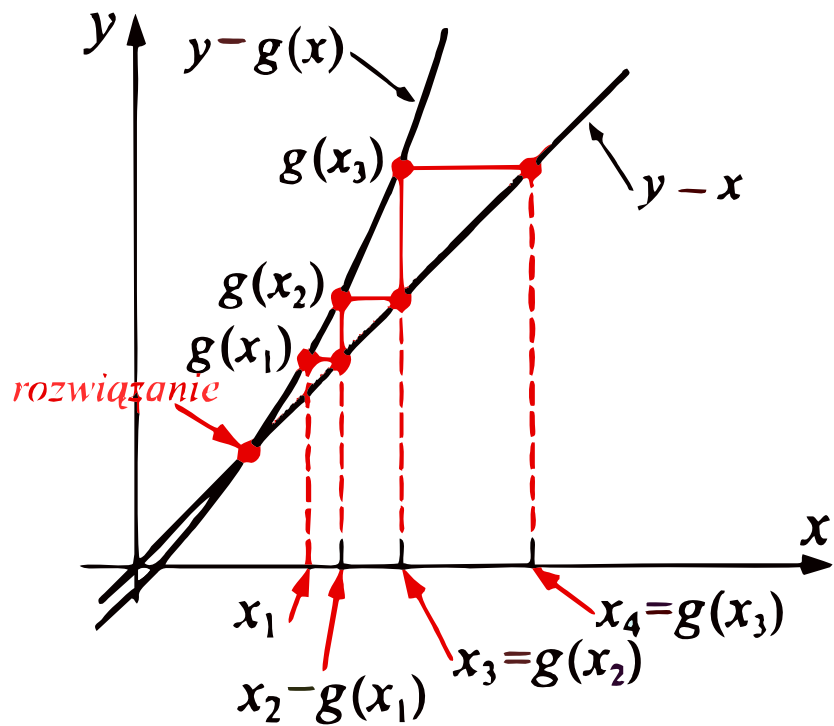
## Twierdzenie:

Jeśli funkcja  $g$  jest ciągła w pewnym przedziale wokół punktu  $x^*$  takiego, że  $g(x^*) = x^*$ , to mówimy, że  $x^*$  jest punktem stałym odwzorowania  $g$ .

Jeśli ponadto  $g'(x)$  jest ciągła w tym przedziale i spełniona jest nierówność:  $g'(x^*) \leq c < 1$ , to ciąg iteracji  $x_{n+1} = g(x_n)$  jest zbieżny do punktu stałego.

Dla opornych: jeśli  $g(x)$  jest gładka i ograniczona i niezbyt stroma, to proces iteracyjny jest zbieżny.

# Metoda szukania punktu stałego: zbieżność



# Metoda szukania punktu stałego: przykład

$$x - x^{1/3} - 2 = 0$$

Trzy sposoby zapisu:

$$x_{k+1} = g_1(x_k) = x_k^{1/3} + 2$$

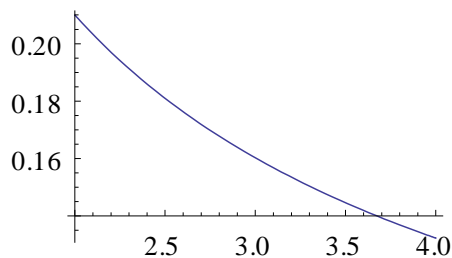
$$x_{k+1} = g_2(x_k) = (x_k - 2)^3$$

$$x_{k+1} = g_3(x_k) = \frac{6 + 2x_k^{1/3}}{3 - x_k^{-2/3}}$$

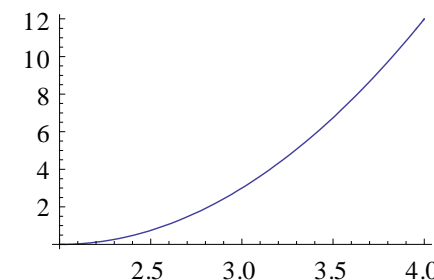
$k$	$g_1(x_{k-1})$	$g_2(x_{k-1})$	$g_3(x_{k-1})$
0	3	3	3
1	3.4422495703	1	3.5266442931
2	3.5098974493	-1	3.5213801474
3	3.5197243050	-27	3.5213797068
4	3.5211412691	-24389	3.5213797068
5	3.5213453678	$-1.451 \times 10^{13}$	3.5213797068
6	3.5213747615	$-3.055 \times 10^{39}$	3.5213797068
7	3.5213789946	$-2.852 \times 10^{118}$	3.5213797068
8	3.5213796042	$\infty$	3.5213797068
9	3.5213796920	$\infty$	3.5213797068

Czy jest jakaś różnica?

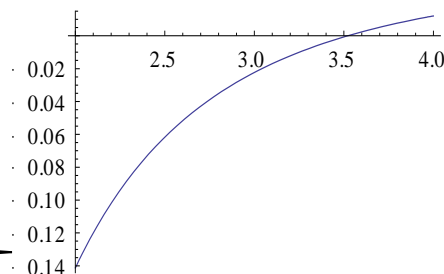
$$g_1'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$$



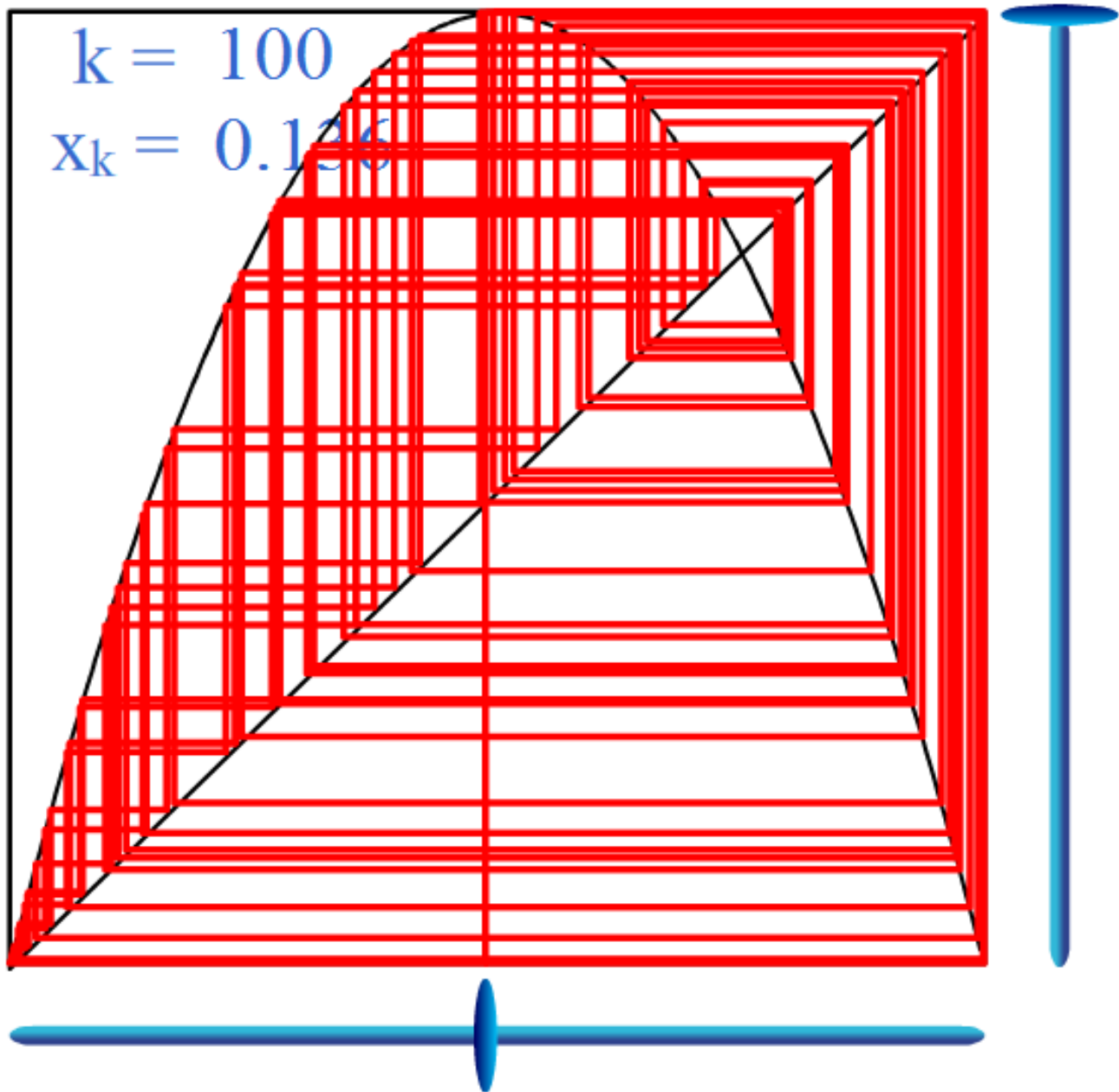
$$g_2'(x) = 3(x-2)^2$$



$$g_3'(x) = \frac{2(x - x^{1/3} - 2)}{x^{1/3}(1 - 3x^{-2/3})^2}$$



**zbieżność**    **rozbieżność**    **szybka zbieżność**





# Równania z wieloma pierwiastkami

```
krok = 1;           //<----- szerokość przedziału
a = 0;             //<----- lewa granica pierwszego przedziału
b = a + krok;     //<----- prawa granica pierwszego przedziału
while(b < bmax)
{
  if(f(a)*f(b) < 0) //<-- sprawdź, czy funkcja zmienia znak
  {
    root[i] = FindRoots(f,a,b); //<-- np. bisekcja
    i = i + 1;
  }
  a = b;           //<----- lewa granica nowego przedziału
  b = a + krok;   //<---- prawa granica nowego przedziału
};
```

# Układy równań nieliniowych

## Metoda Newtona

Dla układu dwóch równań:

$$f_1(x, y) = 0$$
$$f_2(x, y) = 0$$

Wybieramy rozwiązania początkowe  $x_1$  i  $y_1$ . Jeśli są one blisko rozwiązań prawdziwych  $x_2$  i  $y_2$ , to rozwinięcie Taylora funkcji  $f_1$  i  $f_2$  wokół  $x_1$  i  $y_1$ :

**0**  ~~$f_1(x_2, y_2) = f_1(x_1, y_1) + (x_2 - x_1) \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1) \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{x_1, y_1} + \dots$~~

**0**  ~~$f_2(x_2, y_2) = f_2(x_1, y_1) + (x_2 - x_1) \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1) \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{x_1, y_1} + \dots$~~

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x_1, y_1} \Delta x + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{x_1, y_1} \Delta y = -f_1(x_1, y_1) \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x_1, y_1} \Delta x + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{x_1, y_1} \Delta y = -f_2(x_1, y_1) \end{cases}$$

Czyli układ dwóch równań liniowych. Korzystając z reguły Cramera:

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{-f_1(x_1, y_1) \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{x_1, y_1} + f_2(x_1, y_1) \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{x_1, y_1}}{J(f_1(x_1, y_1), f_2(x_1, y_1))} \\ \Delta y = \frac{-f_2(x_1, y_1) \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x_1, y_1} + f_1(x_1, y_1) \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x_1, y_1}}{J(f_1(x_1, y_1), f_2(x_1, y_1))} \end{cases}$$

gdzie  $J$  – jacobian:  $J(f_1, f_2) = \det \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x_1, y_1} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{x_1, y_1} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x_1, y_1} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{x_1, y_1} \end{bmatrix}$

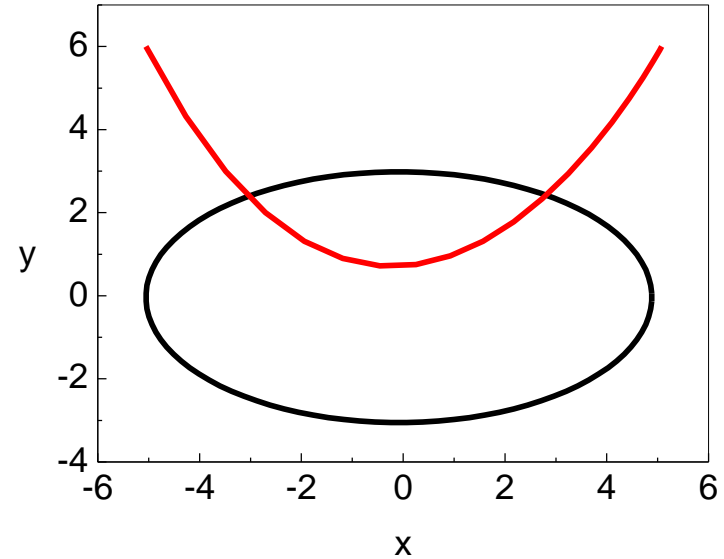
Zatem nowe przybliżenie rozwiązań:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

# Układy równań nieliniowych: przykład

$$\begin{cases} f_1(x, y) = y - \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{-x/2}) = 0 \\ f_2(x, y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0 \end{cases}$$



$$J(f_1, f_2) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(e^{x/2} - e^{-x/2}) & 1 \\ 18x & 50y \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}(e^{x/2} - e^{-x/2})50y - 18x$$

```

F1(x,y) = function { y -0.5*(exp(x/2)+exp(-x/2)) }
F2(x,y) = function { 9*x^2+25*y^2-225 }
F1x(x,y) = function { -(exp(x/2)+exp(-x/2))/4 }
F1y(x,y) = function { 1 }
F2x(x,y) = function { 18*x }
F2y(x,y) = function { 50*y }

```

```

Jacob(x,y) = function { -(exp(x/2) + exp(-x/2))/4*50*y-18*x }
xi = 2.5; yi = 2; Err = 0.001;

```

Warunki początkowe i dopuszczalny błąd

```
while(1)
```

```

{
Delx = (-F1(xi,yi)*F2y(xi,yi)+F2(xi,yi)*F1y(xi,yi)) / Jacob(xi,yi);
Dely = (-F2(xi,yi)*F1x(xi,yi)+F1(xi,yi)*F2x(xi,yi)) / Jacob(xi,yi);
xip1 = xi + Delx;
yip1 = yi + Dely;
Errx = abs((xip1 - xi)/xi);
Erry = abs((yip1 - yi)/yi);
if(Errx<Err && Erry<Err) break;
xi = xip1; yi = yip1;
};

```

$x_{k+1}$  i  $y_{k+1}$

$\Delta x$  i  $\Delta y$

Błąd względny rozwiązania

i	x	y	Errx	Erry
1	3.0731	2.4296	0.22926	0.21479
2	3.0345	2.3849	0.01258	0.01840
3	3.0314	2.3858	0.00102	0.00037
4	3.0312	2.3859	0.00007	0.00004

# Układy równań nieliniowych: uwagi

W ogólności:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \cdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \cdots \\ -f_n \end{bmatrix}$$

1. Zbieżność nie jest gwarantowana.
2. Funkcje  $f_1, \dots, f_n$  i ich pochodne muszą być ciągłe i ograniczone w pobliżu rozwiązania
3.  $J(f_1, \dots, f_n) \neq 0$  w pobliżu rozwiązania
4. Warunki początkowe wystarczająco blisko prawdziwego rozwiązania
5. Dla układu  $n > 3$  równań powyższe równanie trzeba rozwiązać numerycznie.