**Zad. 1.** Chcąc skorzystać z metody punktu stałego do obliczenia miejsc zerowych funkcji $f(x) = x - e^{-x}$, zaproponuj dwie postacie funkcji pomocniczej $g(x)$ i wyjaśnij, dlaczego można (lub nie można) wykorzystać ich do obliczeń. Jako punkt startowy przyjmij $x_0 = 0.5$ i oblicz trzy pierwsze przybliżenia miejsca zerowego.

**Zad. 2.** Chcąc skorzystać z metody punktu stałego do obliczenia miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 8$, wykaż, że punkty $x_1 = 2$ oraz $x_1 = 4$ są miejscami zerowymi funkcji. Zaproponuj właściwą funkcję pomocniczą $g(x)$ do wyznaczenia numerycznego każdego z miejsc zerowych.

**Zad. 3.** Niech $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$. Który pierwiastek równania $f(x)=0$ znajdzie metoda bisekcji dla przedziału [-3, 2.5]?

**Zad. 4.** Funkcja $f(x) = \sin \pi x$ ma zera dla każdej liczby całkowitej. Pokaż, że gdy $-1 < a < 0$ oraz $2 < b < 3$, metoda bisekcji zbiega do

(a) 0, gdy $a + b < 2$

(b) 2, gdy $a + b > 2$

(c) 1, gdy $a + b = 2$

**Zad. 5.** Niech $f(x) = -x^3 - \cos x$. Chcąc skorzystać z metody Newtona, wyjaśnij, który warunek początkowy będzie lepszy: $x_0 = -1$, czy $x_0 = 0$?

**Zad. 6.** Pierwiastek równania $f(x) = 0$ jest poszukiwany za pomocą metody Newtona. Początkowe przybliżenie pierwiastka wynosi $x_0 = 3$, $f(3) = 5$. Kąt, jaki tworzy styczna do funkcji $f(x)$ w punkcie $x = 3$ w odniesieniu do osi $x$ wynosi 57 stopni. Następne przybliżenie pierwiastka $x_1$ wynosi:

(A) –3.2470 (B) −0.2470 (C) 3.2470 (D) 4.2470 (F) 5.2470 (E) 6.2470

**Zad. 7.** Niech macierz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ma współczynniki $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = \gamma$, $a_{21} = 0$, gdzie $\gamma > 0$. Jeżeli precyzja zapisu liczby zmiennoprzecinkowej wynosi $0.5 \times 10^{-6}$, wykaż, że liczba cyfr znaczących w rozwiązaniu równania $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, $m < 6 - 2\log_{10}(1+\gamma)$.

**Zad. 8.** Dane jest układ równań

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Gdzie $k > 0$. Dla jakich wartości parametru $k$, układ ten może być rozwiązany metodą Jacobiego?

**Zad. 9.** Zastosuj metodę potęgową do znalezienia wektora własnego i wartości własnej macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.

**Zad. 10.** Znajdź faktoryzację QR macierzy $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$.

**Zad. 11.** Dany jest kwadrat, którego wierzchołki dane są wektorami: *A=[1 1 0], B=[2 1 0], C=[1 2 0], D=[2 2 0]*. Znajdź odbicie tego kwadratu względem powierzchni określonej wektorem *v=[0 1 0]*. Zweryfikuj wynik rysując kwadrat i jego odbicie.

**Zad. 12.** Mając dane punkty

| | | | |
|---|---|---|---|
| *x* | *0* | *2* | *3* |
| *y* | *7* | *11* | *28* |

użyj metody Lagrange'a do określenia wartości $y$ w punkcie $x = 1$.

**Zad. 13.** Punkty

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *-2* | *1* | *4* | *-1* | *3* | *-4* |
| *y* | *-1* | *2* | *59* | *4* | *24* | *-53* |

leżą na wielomianie. Korzystając z algorytmu Newtona znajdź stopień tego wielomianu.

**Zad. 14.** Znajdź wielomiany sklejane trzeciego stopnia dla punktów

| | | | |
|---|---|---|---|
| *x* | *0* | *1* | *2* |
| *y* | *0* | *2* | *1* |

**Zad. 15.** Wykaż, że czwartą pochodną można przybliżyć z wykorzystaniem różnic wstecznych jako:

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$$

**Zad. 16.** Wykaż, że drugą pochodną można przybliżyć z wykorzystaniem różnic centralnych jako:

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i-2}) + 16f(x_{i-1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{12h^2}$$

**Zad.17.** Przedstaw graficzny schemat operatora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ wyrażonego przez różnice zwykłe.

**Zad.18.** Przedstaw graficzny schemat operatora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ z wykorzystaniem czteropunktowych różnic centralnych.

---

**Zad. 19.** Wartość całki przy użyciu jedno-, dwu- i cztero-segmentowej metody trapezów wynosi odpowiednio 5.3460, 2.7708 i 1.7536. Najlepsze przybliżenie całki przy użyciu metody Romberga wynosi: A) 1.3355, B) 1.3813, C) 1.4145, D) 1.9124, E) 1.7536. Odpowiedź uzasadnij.

**Zad. 20.** Dane jest równanie $\frac{dy}{dt} = -1000y + 3000 - 2000t^2$, z warunkiem początkowym $y(0) = 0$. Korzystając z niejawnej metody Eulera i kroku $h = {}^1/_{100}$, znajdź przybliżoną wartość *y(t)* w chwili $t = {}^1/_{100}$.

Odp: $y({}^1/_{100}) = \frac{29998}{11000}$.

**Zad. 21.** Rozwiązaniem równania $\frac{dy}{dx} = -ay$ , $y(0) = y_0$, $a > 0$, jest funkcja $y(x) = y_0 e^{-ax}$. Mówimy, że metoda jest stabilna, gdy numeryczne rozwiązanie równania daną metodą zachowuje się asymptotycznie tak samo, jak rozwiązanie analityczne. W powyższym przypadku, rozwiązanie numeryczne powinno dążyć do zera dla $x \to \infty$. Wykaż, że metoda niejawna Eulera jest bezwarunkowo stabilna (nie zależy od kroku *h*).

**Zad. 22.** Dane jest równanie $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}$. Zbadaj stabilność schematu numerycznego, gdy obie pochodne przybliżone są najprostszą różnicą zwykłą, a schemat jest niejawny. Odpowiedź uzasadnij graficznie przedstawiając współczynnik wzmocnienia na płaszczyźnie zespolonej.

Odp: $G = \frac{1}{1+r-re^{i\beta}}$. Schemat jest bezwarunkowo stabilny.

**Zad. 23.** Znajdź macierz prawdopodobieństw przejść Π dla rozkładu granicznego π = (1/2, 1/3, 1/6) korzystając z algorytmu Metropolisa.

Odp: $\Pi = \begin{bmatrix} 1/9 & 2/9 & 6/9 \\ 2/6 & 3/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

**Zad. 24**. Macierz prawdopodobieństw przejść ma postać $\Pi = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$. Znajdź rozkład graniczny.

Odp: $\pi = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

**Zad. 25**. Znajdź sposób generowania liczb losowych z rozkładu Lorentza za pomocą odwrotnej dystrybuanty.

Odp: $x = tan\left[\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right]$, gdzie $U$ jest liczbą losową z rozkładu jednorodnego [0,1).