

Ćwiczenia do wykładu *Fizyka Statystyczna i Termodynamika*

Prowadzący dr Agata Fronczak

Zestaw 1. Pierwsze prawo termodynamiki, funkcje odpowiedzi, równania stanu.

- 1.1 Oblicz entropię gazu doskonałego. Skorzystaj z termodynamicznej definicji przyrostu entropii w procesie odwracalnym. Załóż, że pojemność cieplna C_V gazu jest stała.

Wskazówka: Pojemność cieplna C_V dowolnego układu termodynamicznego jest zdefiniowana jako pochodna energii wewnętrznej po temperaturze $C_V = dU/dT$.

Odpowiedź: $S = C_V \ln T + nR \ln V + \text{const.}$

- 1.2 Entropia n moli monoatomowego gazu doskonałego jest równa

$$S = \frac{5}{2}nR + nR \ln \left[\left(\frac{V}{V_0} \right) \left(\frac{n_0}{n} \right) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right], \quad (1)$$

gdzie V_0, n_0 oraz T_0 reprezentują odpowiednie stałe. Wiedząc, że równanie stanu gazu doskonałego ma postać $pV = nRT$, wyznacz energię wewnętrzną U oraz potencjał chemiczny μ tego gazu.

Wskazówka: Rozwiązując zadania z termodynamiki, w wielu przypadkach wygodniej jest posługiwać się gęstościami wielkości termodynamicznych (np. molową objętością $v = V/n$, molową gęstością entropii $s = S/n$, molową gęstością energii wewnętrznej $u = U/n$) zamiast samymi zmiennymi termodynamicznymi (tj. objętością V , entropią S , czy energią wewnętrzną U). Aby rozróżnić te dwa rodzaje parametrów podstawowe zmienne termodynamiczne oznaczają się wielkimi literami, zaś ich gęstości małymi.

Odpowiedź: $U = \frac{3}{2}nRT + nu_0$, $\mu = -RT \ln \left[\frac{p_0}{p} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \right]$, gdzie u_0 i p_0 oznaczają pewne charakterystyczne wartości energii wewnętrznej i ciśnienia.

- 1.4 Pokaż, że poniższa zależność jest prawdziwa

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T} \right)_V. \quad (2)$$

- 1.5 Wyznacz następujące funkcje odpowiedzi charakteryzujące monoatomowy gaz doskonały:

- i. molowe ciepła właściwe c_v oraz c_p ,
- ii. izotermiczną i adiabatyczną ściśliwość gazu κ_T oraz κ_S ,
- iii. współczynnik rozszerzalności cieplnej α_p .

Załącz, że entropia, energia wewnętrzna oraz entalpia¹ badanego gazu są znane. Skorzystaj z wyniku zadania 1.2.

Odpowiedź: $c_v = 3R/2$, $c_p = 5R/2$, $\kappa_T = 1/p$, $\kappa_S = 3/(5p)$, $\alpha_p = 1/T$.

- 1.7 *Proces izochoryczny* $V = \text{const.}$ Jak dużo ciepła Q_V potrzeba, aby ogrzać n moli powietrza z temperatury T_1 do temperatury T_2 . Załącz stałą objętość gazu. Przyjmij, że molowe ciepło właściwe powietrza jest równe c_v .

Odpowiedź: $Q_V = nc_v(T_2 - T_1)$.

- 1.8 *Proces izobaryczny* $p = \text{const.}$ Jak dużo ciepła wykorzystano do ogrzania powietrza w procesie izobarycznym, jeśli na początku procesu objętość i temperatura powietrza wynosiły odpowiednio V i T_1 , zaś po zakończeniu procesu V i T_2 . Załącz, że molowe ciepło właściwe powietrza jest znane i wynosi c_p .

Odpowiedź: $Q_p = nc_p(T_2 - T_1)$.

- 1.9 Rozważ proces termodynamiczny, w którym parametr stanu $x = \text{const.}$ Załącz, że stan badanego układu może być opisany za pomocą jedynie dwóch niezależnych parametrów np. objętości v i temperatury T . Pokaż, że molowe ciepło właściwe c_x jest równe

$$c_x = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_x. \quad (3)$$

- 1.10 Udowodnij, że dla gazu doskonałego prawdziwy jest tzw. wzór Mayera

$$c_p - c_v = R, \quad (4)$$

gdzie c_v oraz c_p oznaczają odpowiednio molowe ciepło właściwe przy ustalonej objętości oraz ciśnieniu, natomiast R reprezentuje stałą gazową.

Wskazówka: Zadanie to można rozwiązać wykorzystując wyrażenie (3) dla $x = p$.

¹Entalpia jest funkcją stanu zdefiniowaną jako $h = u + pv$.

- 1.12 Rozważ gaz doskonały. Pokaż, że w procesie quasistatyczno-adiabatycznym spełniona jest tzw. *relacja Poissona*

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (5)$$

gdzie $\gamma = c_p/c_v$.

Uwaga: Zależność (5) jest równaniem adiabaty gazu doskonałego.

- 1.15 Pokaż, że wymienione zależności są prawdziwe:

i.

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = \frac{c_v}{T}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}, \quad (6)$$

ii.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T \partial v} = T \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial v}, \quad (7)$$

iii.

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \quad (8)$$

- 1.17 Korzystając z relacji Poissona $pV^\gamma = \text{const}$ (5) (str. 3), oblicz ściśliwość gazu doskonałego w procesie adiabatycznym. Czy zadanie to można rozwiązać bez założenia o quasistatyczności procesu?

Wskazówka: Adiabatyczną ściśliwość definiuje się jako $\kappa_S = -(\partial V/\partial p)_S/V$.

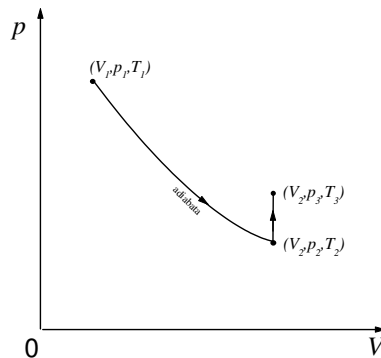
Odpowiedź: $\kappa_S = \frac{1}{\gamma p}$ (zobacz odpowiedź do zadania 1.5).

- 1.18 *Proces izotermiczny* $T = \text{const}$. Oblicz pracę potrzebną na izotermiczne sprężenie n moli gazu doskonałego od objętości V_1 do objętości V_2 . Załóż, że temperatura gazu wynosi T . Czy zadanie to można rozwiązać bez założenia o quasistatyczności procesu?

Odpowiedź: $W = RT \ln \frac{V_1}{V_2} > 0$.

- 1.19 W naczyniu o adiabatycznych ściankach i objętości V znajduje się powietrze o temperaturze T_1 . W jednej ze ścianek zrobiono niewielki otwór, przez który powietrze może swobodnie przepływać do wnętrza i na zewnątrz naczynia. Znając ciśnienie otoczenia $P = \text{const}$ oraz ciepło właściwe powietrza c_p , oblicz, ile ciepła potrzeba na quasistatyczne ogrzanie zawartości naczynia do temperatury T_2 . Załóż, że powietrze jest gazem doskonałym.

Odpowiedź: $Q = \frac{pVc_p}{R} \ln \frac{T_2}{T_1}$.



Rysunek 1: Do zadania 1.22.

- 1.20 Oblicz pracę, jaką wykonuje gaz doskonały na swoim otoczeniu w procesie adiabatycznego rozprężania. Rozwiązując zadanie załóż, że stanie początkowym gaz miał temperaturę T_1 , a w stanie końcowym T_2 . Przyjmij, że molowe ciepło właściwe gazu doskonałego jest stałe i wynosi c_v .

Wskazówka: Równanie adiabaty dla gazu doskonałego ma postać $pV^\gamma = \text{const}$ (5) (str. 3), gdzie $\gamma = c_p/c_v$ oraz $c_v = R/(\gamma - 1)$ (4) (str. 2).

Odpowiedź: $W = nc_v(T_1 - T_2)$.

- 1.21 Jeden mol gazu doskonałego quasistatycznie rozpręża się przy stałej temperaturze T . Zakładając, że początkowe ciśnienie gazu wynosi p_1 , zaś końcowe p_2 , oblicz, ile pracy wykonał gaz podczas rozprężania.

Odpowiedź: $W = RT \ln \frac{p_2}{p_1}$.

- 1.22 W procesie adiabatycznym zmieniamy stan gazu doskonałego z (p_1, V_1, T_1) do (p_2, V_2, T_2) (rys. 1). Następnie, utrzymując stałą objętość V_2 , dostarczamy do gazu tyle samo ciepła, ile zużył on na wykonanie pracy podczas zmiany stanu, tj. doprowadzamy układ do nowego stanu (p_3, V_2, T_3) . Pokaż, że ostateczna temperatura gazu jest równa $T_3 = T_1$. Jaka jest relacja między p_1 i p_3 ?

Wskazówka: Energia wewnętrzna gazu doskonałego zależy jedynie od temperatury.

Odpowiedź: Jeśli gaz uległ rozprężeniu $V_1 < V_2$ (sprężeniu $V_1 > V_2$), wtedy $p_1 > p_3$ ($p_1 < p_3$).