

ĆWICZENIA Z LICZENIA POCHODNYCH Z ROZWIĄZANIAM

WZORY NA POCHODNE

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

POCHODNA ILOCZYNU I ILORAZU

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}.$$

Zadanie 1. *Policz pochodne*

(a) $f(x) = \sqrt{x} + 5x^2 + 3x + 1$	(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x + 3 \ln x + \sqrt[3]{x}$	(c) $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x + 1)$
(d) $f(x) = \sin x \cdot \ln x$	(e) $f(x) = \operatorname{ctg} x$	(f) $f(x) = \frac{2x^4 + 2x}{\ln x}$
(g) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sin x}$	(h) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	(i) $f(x) = \sqrt{x}(x + e^x).$

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

$$(f(w(x)))' = f'(w(x)) \cdot w'(x).$$

Zadanie 2. *Policz pochodne funkcji złożonych*

(a) $f(x) = \ln(2x + 1)$	(b) $f(x) = e^{x^2 + 2x}$	(c) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$
(d) $f(x) = \cos(-x^3 + 3x + 2)$	(e) $f(x) = e^{\sin x}$	(f) $f(x) = \ln(\cos x)$
(g) $f(x) = (x^5 + 3x^3 + 1)^{10}$	(h) $f(x) = \ln^3 x$	(i) $f(x) = \sin^2 x$
(j) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 3}$	(k) $f(x) = \sqrt{\cos x}$	(l) $f(x) = \ln(x^3 + 3)$

Przykładowa droga rozwiązania Zadania 2.(a)

W przykładzie $f(x) = \ln(2x + 1)$ funkcja WEWNĘTRZNA to $2x + 1$. Oznaczmy $w = 2x + 1$.
Wtedy $\ln(2x + 1) = \ln w$ i

$$(\ln w)' = \frac{1}{w} \cdot w'.$$

Czyli wstawmy $w = 2x + 1$.

$$(\ln(2x + 1))' = \frac{1}{2x + 1} \cdot (2x + 1)'$$

czyli po obliczeniu

$$(\ln(2x + 1))' = \frac{1}{2x + 1} \cdot (2 + 0) = \frac{2}{2x + 1}.$$

Rozwiązanie (c) W przykładzie $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ funkcja wewnętrzna to $w = \sqrt{x}$. Mamy $f = \sin w$, więc liczymy

$$(\sin w)' = \cos w \cdot w'.$$

Wstawiamy $w = \sqrt{x}$ i mamy

$$(\sin(\sqrt{x}))' = \cos(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'.$$

Obliczmy

$$(\sin(\sqrt{x}))' = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

Rozwiązanie (j) W przykładzie $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 3}$ funkcja wewnętrzna to $w = x^3 + 2x^2 - 3$. Mamy $f = \sqrt{w}$, więc liczymy

$$(\sqrt{w})' = \frac{1}{2\sqrt{w}} \cdot w'.$$

Wstawiamy $w = x^3 + 2x^2 - 3$ i mamy

$$(\sqrt{x^3 + 2x^2 - 3})' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 - 3}} \cdot (x^3 + 2x^2 - 3)'.$$

Obliczmy

$$(\sqrt{x^3 + 2x^2 - 3})' = \frac{3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 - 3}}.$$

Rozwiązania Zadania 1. Pochodne wynoszą

(a) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 10x + 3$, (b) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + 2 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, (c) $e^x(x^2 + 4x + 3)$, (d) $\sin x \cdot \frac{1}{x} + \cos x \cdot \ln x$,
(e) $\frac{-1}{\sin^2 x}$, (f) $\frac{(8x^3+2)\ln x - 2x^3 - 2}{\ln^2 x}$, (g) $\frac{(2x+2)\sin x - (x^2+2x)\cos x}{\sin^2 x}$, (h) $\frac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$, (i) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + e^x) + \sqrt{x}(1 + e^x)$.

Rozwiązania Zadania 2. Pochodne wynoszą

(a) jw , (b) $(2x + 2)e^{x^2+2x}$, (c) jw , (d) $(3x^2 - 3)\sin(-x^3 + 3x + 2)$, (e) $\cos x \cdot e^{\sin x}$,
(f) $\frac{-\sin x}{\cos x}$, (g) $10(x^5 + 3x^3 + 1)^9(5x^4 + 9x^2)$, (i) $2\sin x \cos x$, (j) jw , (k) $\sqrt{\cos x}$, (l) $\frac{3x^2}{x^3+3}$.