

31 – WYZNACZANIE STOSUNKU e DO m

Instrukcja do ćwiczeń wirtualnych w Laboratorium Fizyki I teren południowy

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie stosunku ładunku elektronu do jego masy i sprawdzenie czy wyprowadzony teoretycznie wzór znajduje potwierdzenie w doświadczeniu.

1. WSTĘP TEORETYCZNY

Ruch ładunku w polu elektrycznym i magnetycznym

Na ładunek q w polu magnetycznym działa siła zwaną **siłą Lorentza**:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Gdzie \vec{v} jest prędkością ładunku, a \vec{B} indukcją pola magnetycznego. Z własności iloczynu wektorowego wynika, że wektor siły jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{v} \times \vec{B}$, a jego zwrot wyznacza reguła śruby prawoskrętnej. Wartość siły Lorentza wynosi:

$$F = qvB \sin \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle$$

Jak łatwo zauważyć, pole magnetyczne nie działa na ładunek elektryczny wówczas, gdy ładunek nie porusza się ($v = 0$) lub gdy porusza się w kierunku linii indukcji pola magnetycznego (wtedy sinus kąta między wektorami \vec{v} i \vec{B} równa się zero). Siła działająca na ładunek będzie miała wartość największą, gdy kierunek wektora prędkości będzie prostopadły do linii indukcji magnetycznej \vec{B} . Tak więc, tor ruchu po jakim się porusza ładunek (po prostej, okręgu lub krzywej śrubowej) zależy od tego, jak skierowany jest wektor prędkości względem kierunku wektora indukcji magnetycznej. Należy zauważyć, że siła Lorentza jest zawsze skierowana prostopadle do kierunku ruchu ładunku, co powoduje, że (dla stałego pola magnetycznego) **praca wykonana przez tę siłę nad ładunkiem wynosi zero**. Dla elementu toru ładunku o długości dL praca ta, dW wynosi $\vec{F} \cdot d\vec{L}$ i jest równa zero, ponieważ wektory \vec{F} i $d\vec{L}$ są zawsze prostopadłe. Z tego powodu stałe pole magnetyczne **nie może zmienić energii kinetycznej** poruszającego się ładunku, a zatem i wartości prędkości; może tylko zmienić kierunek jego ruchu.

Na ładunek q w polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} działa siła:

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

której wartość, w przeciwieństwie do pola magnetycznego, **nie zależy** od prędkości poruszającego się ładunku.

Całkowita siła działająca na ładunek znajdujący się jednocześnie w polach elektrycznym i magnetycznym jest sumą wektorową sił od pola elektrycznego i magnetycznego i wyraża się wzorem:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy elektron wlatuje z prędkością \vec{v} do obszaru, w którym działa pole magnetyczne o kierunku linii indukcji \vec{B} równoległym do osi OZ i prostopadłym do wektora prędkości.

Z definicji siły Lorentza (1) i (2) wynika, że siła działająca na cząstkę leży na płaszczyźnie XY i jej wartość wynosi $qvB \sin(\pi/2)$. Ponieważ przyspieszenie styczne do toru cząstki jest równe zero, to wektor prędkości ma stałą wartość. Ruch może odbywać się tylko w płaszczyźnie XY i siła będzie zawsze prostopadła do kierunku ruchu. Również przyspieszenie cząstki $\vec{a} = \vec{F}/m$ ma stałą wartość i jest skierowane prostopadle do prędkości.

Ruchem o takich własnościach jest **ruch jednostajny po okręgu**, w którym siła Lorentza jest zarazem siłą dośrodkową:

$$qvB = \frac{mv^2}{r},$$

gdzie r – jest promieniem okręgu, po którym porusza się cząstka. Łatwo z ostatniego wzoru obliczyć ten promień:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Można też obliczyć czas zataczania jednego okręgu przez poruszający się ładunek, czyli tak zwany **okres obiegu**:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi mv}{qvB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Czas ten **nie zależy od prędkości ładunku**, a tylko od wartości pola magnetycznego i stosunku masy cząstki do jej ładunku. Powyższa cecha ruchu ładunków w polu magnetycznym oraz ich zachowanie w polu elektrycznym zostały wykorzystane przy budowie wielu przyrządów pomiarowych, takich jak np. spektrometry masowe, komory pęcherzykowe, cyklotrony, itp.

Przeanalizujmy teraz sytuację, gdy elektron porusza się w obszarze, w którym działają **oba pola: magnetyczne i elektryczne**, tak jak pokazano to na rys. 1. Kierunki wektorów natężeń pól elektrycznego i magnetycznego są do siebie równoległe, natomiast kierunek prędkości elektronu tworzy z kierunkami wektorów natężeń pól kąt α . Całkowita siła działająca na ładunek znajdujący się jednocześnie w polach elektrycznym i magnetycznym jest sumą wektorową sił określonych wzorami (1) i (6) i wyraża się wzorem:

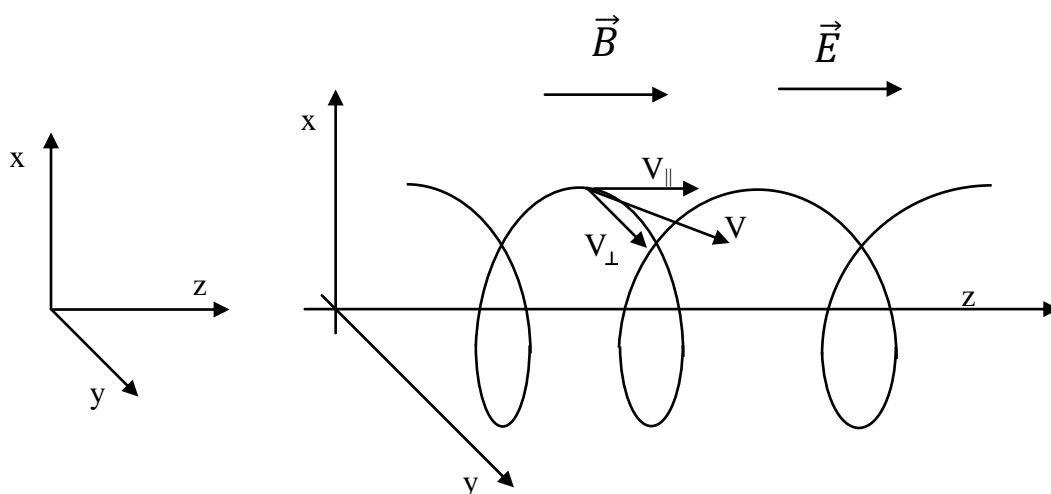
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Wektor prędkości \vec{v} rozkładamy na dwie składowe: prostopadłą $v_{\perp} = v \sin \alpha$ i równoległą $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ do wektora indukcji magnetycznej. **Zgodnie z zasadą niezależności ruchów, ruch w każdym z kierunków rozpatrujemy osobno.** W kierunku prostopadłym do kierunku linii sił pól elektrycznego i magnetycznego na elektron działa, zgodnie ze wzorem (3), siła Lorentza równa:

$$F = qvB \sin \alpha = qv_{\perp}B$$

Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami ruch w tej płaszczyźnie (prostopadłej do kierunku linii sił pól elektrycznego i magnetycznego) będzie ruchem po okręgu o promieniu wyliczonym ze wzoru:

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

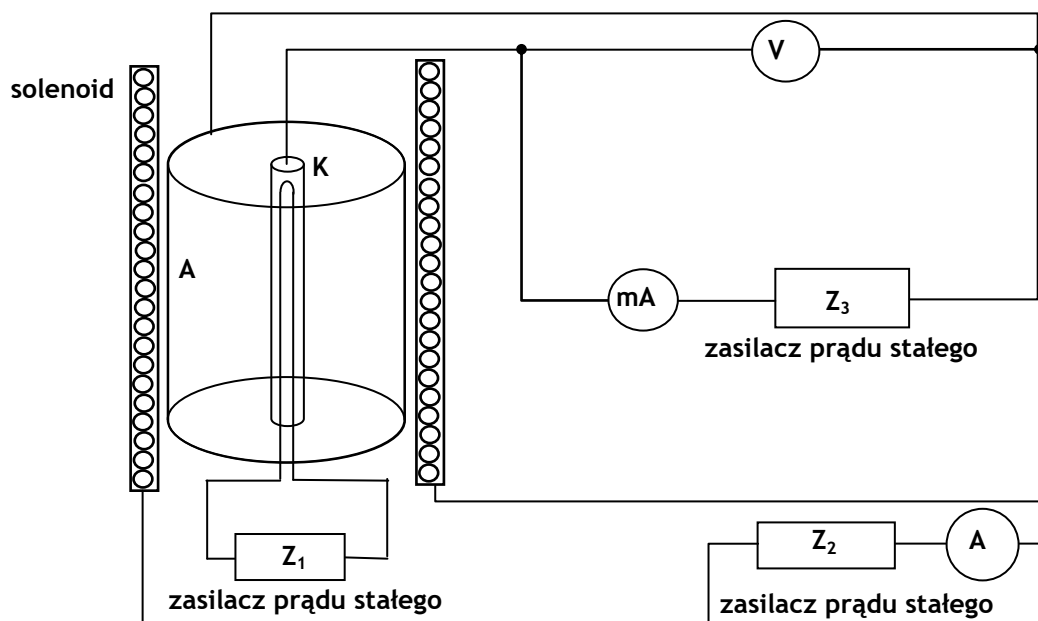


Rys. 1. Ruch elektronu w polach elektrycznym i magnetycznym.

Natomiast w kierunku równoległym (wzdłuż linii sił obu pól) na cząstkę poruszającą się w tym kierunku z prędkością v_{\parallel} działa tylko siła od pola elektrycznego. W przypadku jego nieobecności elektron poruszałby się w tym kierunku ze stałą prędkością $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ (składowa siły Lorentza wzdłuż tego kierunku jest równa zero), a złożenie ruchów w obu kierunkach dawałoby w efekcie ruch elektronu po linii śrubowej o stałym skoku. Obecność

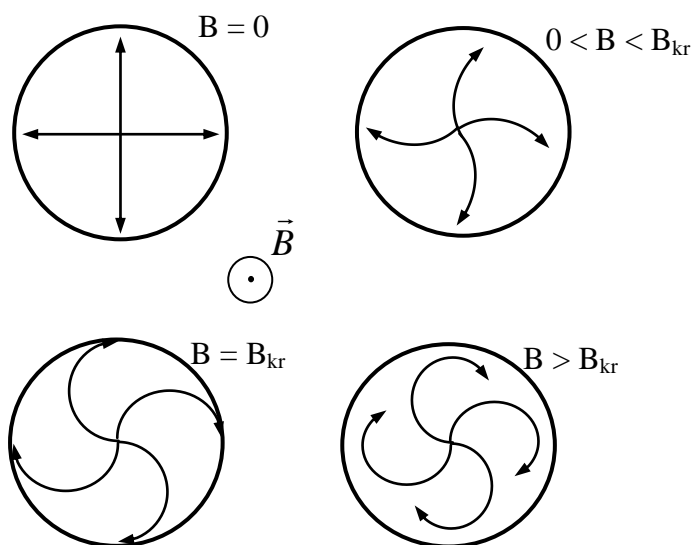
pola elektrycznego powoduje, że elektron w tym kierunku porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, co po złożeniu daje ruch po linii śrubowej o zmiennym, zwiększającym się skoku.

Wyznaczanie wartości e/m metodą magnetronu



Rys.2. Schemat budowy magnetronu i układu do pomiaru wartości e/m . A – anoda, K – katoda, Z_1 – zasilacz obwodu żarzenia katody, Z_2 – zasilacz prądu uzwojenia cewki, Z_3 – zasilacz napięcia anodowego.

Magnetron to lampka elektronowa (dioda składająca się z katody i anody) umieszczona w polu magnetycznym wytwarzanym przez solenoid (cewkę), którego kierunek osi pokrywa się z kierunkiem indukcji pola magnetycznego. Z żarzonej katody emitowane są elektrony (wskutek zjawiska termoemisji). Poruszają się one od katody do anody wskutek obecności pola elektrycznego. Przyłożenie zewnętrznego pola magnetycznego powoduje zakrzywienie toru ich ruchu, a dla pewnej, krytycznej wartości pola magnetycznego, zakrzywienie jest tak duże, że elektrony przestają docierać do anody. Efekty działania pola magnetycznego na ruch elektronów w magnetronie przedstawia rys.3.



Rys.3. Wpływ pola magnetycznego na ruch elektronów od katody do anody.

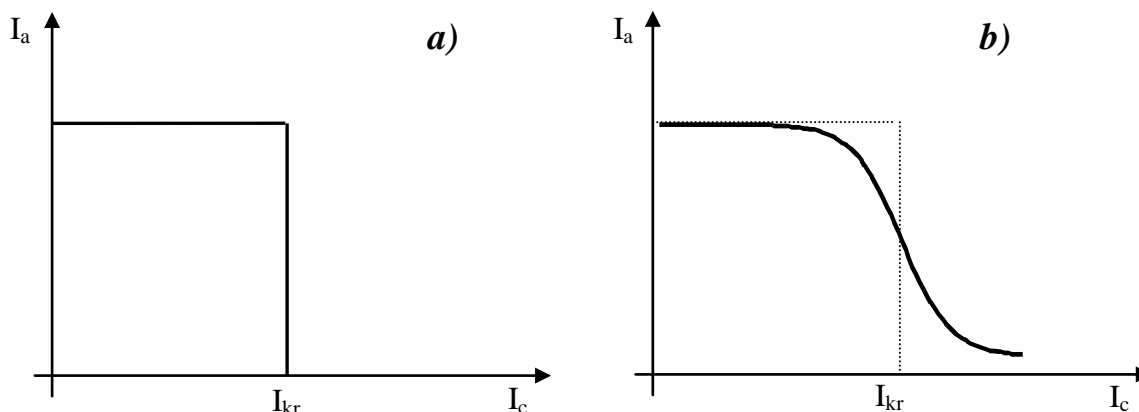
Rozpatrując zależność natężenia prądu anodowego od zewnętrznego pola magnetycznego, możemy w prosty sposób wyznaczyć wartość stosunku ładunku do masy elektronu – e/m . W tym celu należy przeanalizować ruch elektronu w magnetronie od katody do anody, gdzie między anodę i katodę jest przyłożone napięcie U , a lampa znajduje się w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Promień katody wynosi a , promień anody b . Pole magnetyczne wytwarzane jest przez solenoid, przez który przepuszczany jest prąd elektryczny. Wartość indukcji B_{kr} można powiązać z natężeniem I_{kr} przepływającego przez cewkę wytwarzającą pole, stosując wzór na wartość indukcji pola magnetycznego w solenoidzie:

$$B_{kr} = \mu\mu_0 N I_{kr},$$

gdzie μ - przenikalność magnetyczna ośrodka, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ przenikalność magnetyczna próżni, N – liczba zwojów cewki na jednostkę jej długości. W wyniku obliczeń opisanych szczegółowo w Dodatku, otrzymamy wzór na interesującą nas wartość e/m (dla próżni przyjmujemy $\mu=1$):

$$\frac{e}{m} = \frac{8U}{\mu_0^2 N^2 I_{kr}^2 b^2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

W celu wyznaczenia stosunku e/m konieczne jest określenie wartości **natężenia prądu krytycznego**, przy którym przestaje płynąć prąd anodowy. Gdyby wszystkie elektrony miały jednakową prędkość początkową (a tym samym i końcową), to zależność natężenia prądu anodowego od indukcji pola magnetycznego wyglądałaby tak, jak na rys.4a i wartość natężenia prądu krytycznego byłaby wartością, dla której natężenia prądu anodowego maleje do zera.



Rys.4. Zależność natężenia prądu anodowego od natężenia prądu płynącego przez cewkę w przypadku: a) idealnym, b) rzeczywistym.

Tak jednak nie jest, gdyż elektrony opuszczają katodę z różnymi prędkościami (rozkład prędkości elektronów opuszczających katodę jest **rozkładem Maxwella – Boltzmann**), a dodatkowo zderzają się ze sobą na drodze od katody do anody. W efekcie wartość pola krytycznego dla różnych elektronów jest różna, a wykres natężenia prądu anodowego w funkcji natężenia prądu płynącego przez cewkę ma charakter jak na rys.4b. Za wartość natężenia prądu krytycznego przyjmujemy tę wartość, dla której krzywa ma punkt przegięcia.

2. ZŁOŻENIE UKŁADU

Symulację ćwiczenia realizuje aplikacja "Ruch elektronu w polu magnetycznym i elektrycznym".



W skład zestawu wchodzi:

1. Lampa elektronowa (dioda) umieszczona w solenoidzie.
2. Podstawa lampy z wbudowanym zasilaczem obwodu żarzenia diody Z1 (powodujący żarzenie katody i termemisję elektronów). Zasilanie lampy jest niezależne od prądu płynącego w cewce i należy je włączyć włącznikiem I/O (aby się upewnić, że lampa działa można zdjąć solenoid klikając w magazynku opcję „Schowaj solenoid”).
3. Amperomierz do pomiaru natężenia prądu anodowego płynącego przez diodę (włączyć w tryb pomiaru prądu stałego).
4. Zasilacz napięcia anodowego Z3 generujący różnicę potencjałów między katodą a anodą diody, co skutkuje przepływem prądu anodowego.
5. Laptop. Po uruchomieniu programu „Magnetron” możliwe jest zbieranie danych do pliku (aby je eksportować należy kliknąć na wykres prawym przyciskiem myszy i wybrać opcję „Export”).
6. Amperomierz do pomiaru natężenia prądu solenoidu (włączyć w tryb pomiaru prądu stałego).
7. Zasilacz prądu solenoidu Z2 do sterowania wartością natężenia prądu płynącego w solenoidzie, a w konsekwencji wartością indukcji pola magnetycznego wewnątrz solenoidu.
8. Rozdzielacz sygnału.
9. Voltomierz do pomiaru napięcia anodowego (ustawić w tryb pomiaru napięcia prądu stałego).

Wyjąć wszystkie przyrządy z magazynka, połączyć kablami zgodnie z podpowiedziami symulacji, ustawić właściwe funkcje pomiarowe na multimetrach, włączyć zasilanie każdego z przyrządów. Na rozdzielaczu sygnału (8), wejścia *Hot1*, *Hot2* i *Hot3* służą do podłączenia wyższych napięć, *Com1*, *Com2* i *Com3* do niższych. **Zasilacze generują napięcie wyjściowe dopiero po wciśnięciu przycisku Output On/Off.**

3. WYKONANIE ĆWICZENIA

W celu wyznaczenia stosunku e/m należy zmierzyć zależności natężenia prądu anodowego I_a od natężenia prądu solenoidu I_s dla różnych wartości napięcia anodowego. Wartości napięć dla każdej osoby oraz liczbę mierzonych zależności zostaną określone przez prowadzącego ćwiczenie.

1. Nastawić wartość napięcia anodowego na pierwsze określone przez prowadzącego napięcie. Prąd anodowy lampy powinien być w przybliżeniu stały, jednak ze względu na różne prędkości (energii kinetyczne) emitowanych elektronów prąd będzie nieznacznie zmieniał swoją wartość.
2. Włączyć zasilanie solenoidu.
3. Zmieniać wartość natężenia prądu płynącego przez solenoid i dla każdego punktu zapisywać zmierzoną wartość natężenia prądu anodowego. Przy pewnej wartości prąd anodowy zacznie spadać – w tym zakresie zapisywać wyniki z maksymalną dostępną rozdzielczością. Gdy wartość natężenia prądu anodowego spadnie i będzie mniejsza od $1 \mu\text{A}$ lub zacznie zmieniać znak należy zakończyć pomiary.
4. Procedurę należy powtórzyć dla wszystkich zadanych wartości napięcia anodowego.

4. OPRACOWANIE WYNIKÓW

4.1. Dane do opracowania wyników

Dane dotyczące magnetronu: $a=0,5 \text{ mm}$; $b=10 \text{ mm}$; $N=2300$ (wartości dokładne)

Dane mierników (zakresy pomiarowe multimetrów przełączane są automatycznie):

Amperomierze: $c_1=1 \%$; $c_2=0 \%$; zakresy $100 \mu\text{A}$; 10 mA ; 100 mA ; 1 A ; 10 A

Woltomierz: $c_1=1\%$; $c_2=0,1\%$; zakresy 100 mV ; 1 V ; 10 V ; 40 V

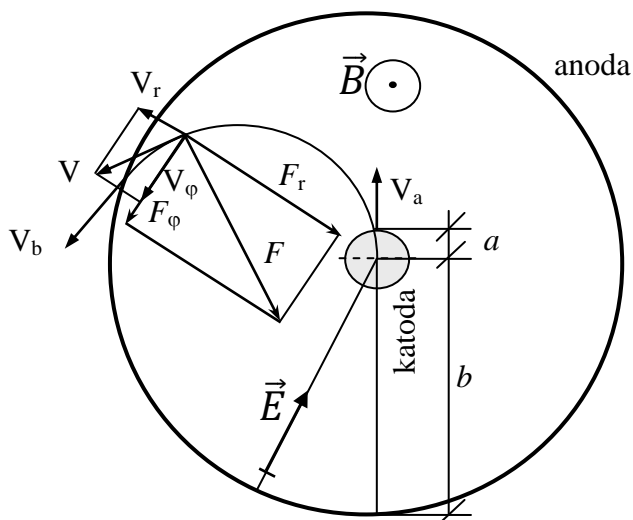
4.2. Opracowanie wyników

1. Dla pierwszego napięcia anodowego utworzyć wykres zależności natężenia prądu anodowego I_a od natężenia prądu solenoidu I_s (punkty pomiarowe muszą mieć odcinki niepewności pomiarów natężenia prądu anodowego i solenoidu - są to niepewności typu B).
2. Zakłada się, że wartość natężenia prądu krytycznego znajduje się w punkcie przegięcia krzywej $I_a(I_s)$. Jeżeli potrafi się wykonać numeryczne różniczkowanie, to znaleźć punkt w którym pochodna $\frac{d^2 I_a}{d I_s^2} = 0$ oraz zmienia znak. Natężenie prądu krytycznego można wyznaczyć również jako punkt, w którym leży połowa szerokości obszaru malejącego funkcji $I_a(I_s)$ – opis tej metody zostanie przedstawiony w czasie przygotowania do wykonywania ćwiczenia.
3. Wykonać wykresy i obliczenia I_{kr} dla wszystkich wartości napięcia anodowego.
4. W tabeli umieścić wyznaczone wartości natężenia prądu krytycznego dla różnych wartości napięcia anodowego.
5. Równanie określające wartość stosunku e/m należy przekształcić do postaci liniowej tak, aby poszukiwana przez nas wielkość była zależna tylko od obliczonego współczynnika kierunkowego. W tym celu należy przyjąć $Y = I_{kr}^2$ natomiast $X = UC$; wówczas współczynnik kierunkowy jest odwrotnością e/m_e , a **C oznacza stałą zawierającą wszystkie inne stałe z równania określającego stosunek e/m .**
6. Obliczyć niepewności y_i i x_i czyli $u(I_{kr}^2)$ oraz $u(UC)$.
7. Narysować wykres zależności $I_{kr}^2(UC)$ (punkty muszą mieć odcinki niepewności!).
8. Wykonać dopasowanie liniowe w wyniku którego otrzymamy współczynnik kierunkowy a , wyraz wolny b oraz niepewności obu wielkości $u(a)$ i $u(b)$.
9. Znając wartość współczynnika kierunkowego obliczyć e/m_e niepewność $u(e/m)$. Tak obliczona niepewność jest niepewnością typu A.
10. Obliczyć niepewność typu B wyznaczonego stosunku e do m .
11. Obliczyć niepewność całkowitą (z prawa propagacji niepewności) oraz niepewność rozszerzoną.
12. Obliczyć wartość funkcji testowej χ^2 dla otrzymanej zależności.

DODATEK

Wyprowadzenie wartości stosunku e/m dla magnetronu

Rozpatrując zależność prądu anodowego od zewnętrznego pola magnetycznego, możemy w prosty sposób wyznaczyć wartość stosunku ładunku do masy elektronu – e/m . W tym celu przeanalizujemy ruch elektronu w magnetronie od katody do anody w obecności pola magnetycznego, tak jak na rys.D1, gdzie między anodą i katodą jest przyłożone napięcie U a lampa znajduje się w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} .



Rys.D1. Siły działające w magnetronie na poruszający się elektron.

Siłę Lorentza, podobnie jak prędkość, możemy rozłożyć na dwie składowe: w kierunku do ośrodka lampy (wzdłuż promienia) \vec{F}_r i w kierunku prostopadłym do promienia \vec{F}_ϕ . Całkowita siła działająca na elektron będzie miała składowe \vec{F}_ϕ oraz $\vec{F}_r + e\vec{E}$ (siła $e\vec{E}$ pochodzi od różnicy potencjałów pomiędzy anodą i katodą). Siły \vec{F}_r i $e\vec{E}$ działają wzdłuż promienia r i nie mogą zmienić momentu pędu elektronu względem osi lampy ($\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}_r$, ponieważ wektory \vec{v} i \vec{r} są równoległe). Moment pędu \vec{J} elektronu względem osi magnetronu (równy co do wartości bezwzględnej $|\vec{J}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r} \times m\vec{v}_\phi| = mv_\phi r$) może zmienić jedynie składowa siła Lorentza \vec{F}_ϕ - jej kierunek i wielkość określamy ze wzoru (2). Kierunek siły \vec{F}_ϕ będzie prostopadły do wektora indukcji magnetycznej \vec{B} i składowej prędkości \vec{v}_ϕ . Tak więc możemy napisać:

$$\vec{F}_\phi = e(\vec{v}_r \times \vec{B}) \quad (D1)$$

Należy podkreślić, że wartość siły Lorentza zmienia się, gdyż zmienia się wartość składowej prędkości v_r , wskutek obecności pola elektrycznego. Stosując do tej zależności drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt} \quad (D2a)$$

gdzie $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_\phi$ jest momentem siły, którego wartość zgodnie ze wzorem (D1) wynosi:

$$|\vec{M}| = \vec{r} \times [e(\vec{v}_r \times \vec{B})], \quad (D2b)$$

a \vec{J} jest momentem pędu o wartości:

$$|\vec{J}| = |\vec{r} \times m\vec{v}_\phi| = mv_\phi r. \quad (D2c)$$

Podstawiając wyrażenia (D2b) i (D2c) do wzoru (D2a) po uwzględnieniu, że we wzorze (D2b) $v_r = dr/dt$ otrzymujemy:

$$Be r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(mv_\varphi r). \quad (D3)$$

Mnożąc ostatnie równanie przez dt i całkując stronami wzdłuż promienia od katody do anody, czyli od wartości a do b :

$$eB_{kr} \int_a^b r dr = \int_{amv_a}^{bmv_b} d(mv_\varphi r), \quad (D4)$$

otrzymujemy:

$$eB_{kr} \frac{b^2 - a^2}{2} = bmv_b - amv_a \quad (D5)$$

Bez popełnienia znaczącego błędu możemy przyjąć, że v_a równa się zero, ponieważ większość elektronów opuszcza katodę dokładnie w kierunku od anody do katody i nie posiada składowej wielkości v_φ . Natomiast v_b można obliczyć w bardzo prosty sposób. Można przyjąć, że elektrony docierając do anody posiadają tylko składową prędkości v_φ (dla $B=B_{kr}$ kierunek prędkości elektronów jest styczny do powierzchni anody – porównaj rys.4). Energia kinetyczna elektronów równa się pracy sił pola elektrycznego:

$$\frac{mv_b^2}{2} = eU. \quad (D6)$$

Stąd:

$$v_b = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (D7)$$

Podstawiamy otrzymany wynik do równania (D5):

$$\frac{1}{2} eB_{kr} (b^2 - a^2) = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (D8)$$

Wartość indukcji B_{kr} można powiązać z natężeniem I_{kr} przepływającego przez cewkę wytwarzającą pole, stosując wzór na wartość indukcji pola magnetycznego w solenoidzie:

$$B_{kr} = \mu\mu_0 N I_{kr}, \quad (D9)$$

gdzie μ - przenikalność magnetyczna ośrodka, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ - przenikalność magnetyczna próżni, N - liczba zwojów cewki na jednostkę jej długości. Po prostych przekształceniach wzoru (D8), przy uwzględnieniu (D9), otrzymamy wzór na interesującą nas wartość e/m (dla próżni przyjmujemy $\mu=1$):

$$\frac{e}{m} = \frac{8U}{\mu_0^2 N^2 I_{kr}^2 b^2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2}. \quad (D10)$$