Wyrażanie niepewności pomiaru

Andrzej Kubiaczyk
Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska

Warszawa, 2021

Informacje wstępne

Każdy pomiar wielkości fizycznej dokonywany jest ze skończoną dokładnością, co oznacza, że wynik tego pomiaru dokonywany jest z **niepewnością pomiarową**. Fakt ten związany jest nie tylko z niedoskonałością działań człowieka, lecz także z niedoskonałością wykonania przyrządów pomiarowych, przypadkowym stanem materii w chwili dokonywania pomiaru, wpływem procesu pomiarowego na wielkość mierzoną oraz przybliżonym charakterem modeli rzeczywistości opisywanych w postaci praw fizyki. Zasady obliczania i szacowania niepewności pomiarowych, a także oceny wyników pomiarów zawarte są w normie opublikowanej w 1995 roku przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO). Wersja polska wydana w roku 1999 przez Główny Urząd Miar nosi nazwę „***Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik***”. Stanowi ona podstawę opracowania instrukcji określania niepewności pomiarów wykorzystywanej w Laboratorium Fizyki.

Najważniejsze elementy obowiązujących norm

- Rozróżnienie między *„niepewnością pomiarów"* a *„błędami"* w potocznym tego słowa znaczeniu
- Przyjęcie jednolitej terminologii
- Konsekwentne stosowanie metod statystycznych
- Podział składników niepewności na dwie kategorie **zależne od sposobów obliczania ich wartości (typ A i typ B), a nie od przyczyn ich powstawania**
- Dokładny opis metod określania niepewności pomiarów
- Określenie konwencji zapisu wyników i niepewności pomiarów

Możliwość jednoznacznej interpretacji wyników pomiarów wykonywanych w różnych miejscach i w różnym czasie na całym świecie

Źródła niepewności

- Niepewności związane z niepełną definicją wielkości mierzonej
- Niepewności związane z wykonywaniem pomiarów:
  - niedoskonały układ pomiaru wielkości mierzonej
  - niereprezentatywne pomiary
  - niepełna znajomość oddziaływań otoczenia na pomiar
  - błędy obserwatora w odczytywaniu wskazań przyrządów
  - przybliżenia i założenia upraszczające tkwiące w metodzie i procedurze pomiarowej
  - zmiany kolejnych wyników pomiarów wielkości mierzonej w pozornie identycznych warunkach
- Niepewności związane z przyrządami pomiarowymi:
  - skończona zdolność rozdzielcza przyrządów
  - niedokładne wartości przypisane wzorcom i materiałom odniesienia

Rodzaje pomiarów

- **Pomiar bezpośredni** – wielkość mierzoną porównuje się ze wzorcem lub pomiar wykonywany jest przy użyciu jednego przyrządu *(np. pomiar długości pręta, pomiar rezystancji omomierzem)*
  - **Seria pomiarowa**
  - **Błąd „gruby”**

12,45; 12,48; 12,43; 12,45; 12,47; 11,45, 12,46; 12,68

- **Pomiar pośredni** – na podstawie pomiarów bezpośrednich jednej lub kilku wielkości fizycznych oblicza się wielkość od nich zależną (na podstawie znanej zależności funkcyjnej)
  - *Pomiar wielkości długości i szerokości stołu w celu obliczenia powierzchni stołu*
  - *Pomiar napięcia na rezystorze oraz natężenia prądu w celu obliczenia rezystancji*

Główne pojęcia

- **Niepewność pomiaru (*uncertainty*)** –
  parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.
  - niepewność = wątpliwość
  - niepewność + przymiotnik = miara ilościowa tego pojęcia

- **Niepewność standardowa (*standard uncertainty*) *u(x)*** –
  niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego (estymator wariancji) (na przykład odchylenie standardowe średniej).

Zapis: *u*, *u(x)* lub *u*(nazwa).
u nie jest funkcją, tylko liczbą!

Pomiary bezpośrednie

Główne pojęcia

- **Obliczanie niepewności standardowej – metoda typu A (*type A evaluation of uncertainty*)** – metoda obliczania niepewności pomiaru na drodze analizy statystycznej serii wyników pomiarów.
- Wynik pomiaru: **wartość średnia**

$$x \equiv \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  - Założenia:
    - prawdopodobieństwo występowania wyników mniejszych i większych od średniej jednakowe
    - im większe odchylenie od średniej, tym mniejsze prawdopodobieństwo wystąpienia pomiaru
  - Efekt: Im większa liczba pomiarów, tym bardziej wykres rozrzutu pomiarów podobny jest do **rozkładu Gaussa (rozkład gęstości prawdopodobieństwa).**
- Przykłady: obliczanie odchylenia standardowego średniej dla serii niezależnych obserwacji albo użycie najmniejszej sumy kwadratów w celu dopasowania krzywej do danych i obliczenie parametrów krzywej oraz ich niepewności standardowych.

Rozkład Gaussa

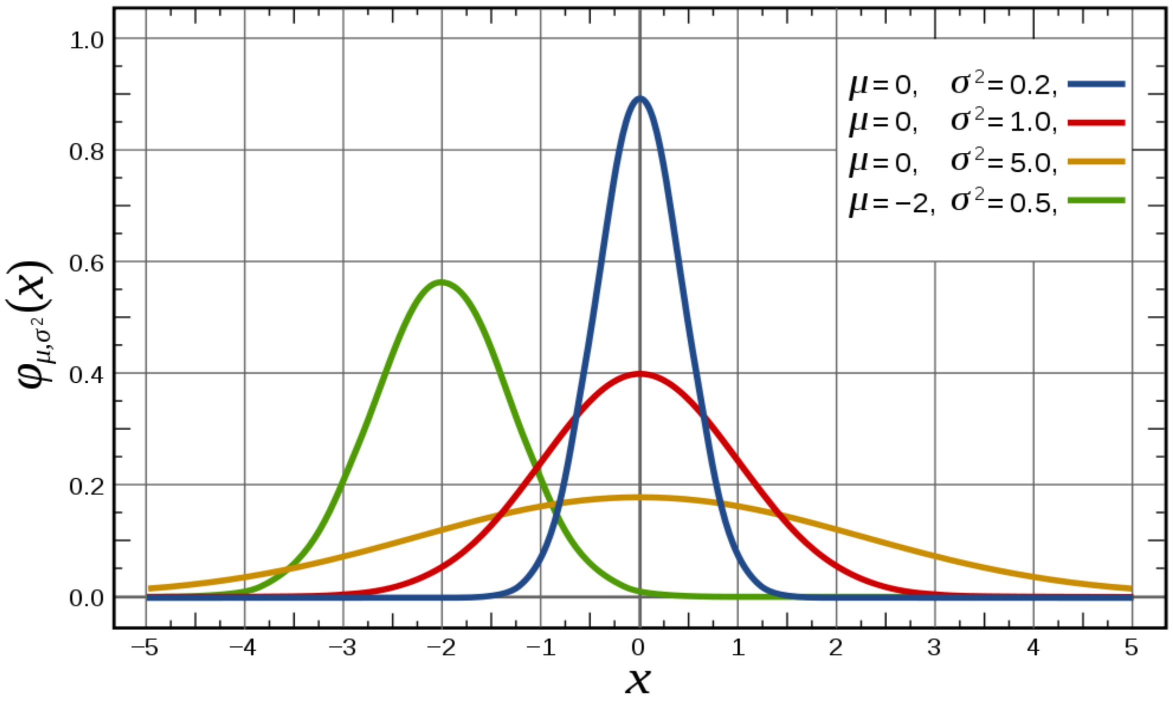
Rozkład dla zmiennej x ciągłej:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

μ – wartość oczekiwana

σ – odchylenie standardowe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$$



$$\int_{-\sigma}^{+\sigma} \varphi(x)dx = 0{,}683$$

$$\int_{-3\sigma}^{+3\sigma} \varphi(x)dx = 0{,}997$$

$$\int_{-2\sigma}^{+2\sigma} \varphi(x)dx = 0{,}954$$

Rozkład Gaussa dla skończonej liczby pomiarów: **za wartość oczekiwaną przyjmujemy średnią arytmetyczną, a za odchylenie standardowe - odchylenie standardowe wartości średniej.**

Niepewność standardowa dla serii pomiarowej obliczana metodą typu A jest równa odchyleniu standardowemu średniej

$$u(x) = \sigma = \sqrt{s_{\bar{x}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Główne pojęcia

- **Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu B *(type B evaluation of uncertainty)*** – metoda obliczania niepewności pomiaru sposobami *innymi* niż analiza statystyczna serii pomiarowej, czyli na drodze innej niż metoda typu A. Oparta jest zwykle o naukowy osąd eksperymentatora biorącego pod uwagę wszystkie dostępne informacje (wiedza o przyrządach, badanym materiale, itp.)
  - Założenie: prawdopodobieństwo uzyskania wyniku mieszczącego się w przedziale wyznaczonym przez wynik i niepewność wzorcowania jest stałe – **rozkład jednostajny**
  - **Niepewność wzorcowania** (efekt dokładności wzorcowania Δx)
  - **Niepewność eksperymentatora** (efekt dokładności eksperymentatora Δx_e)

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

- **Prawo dodawania niepewności**

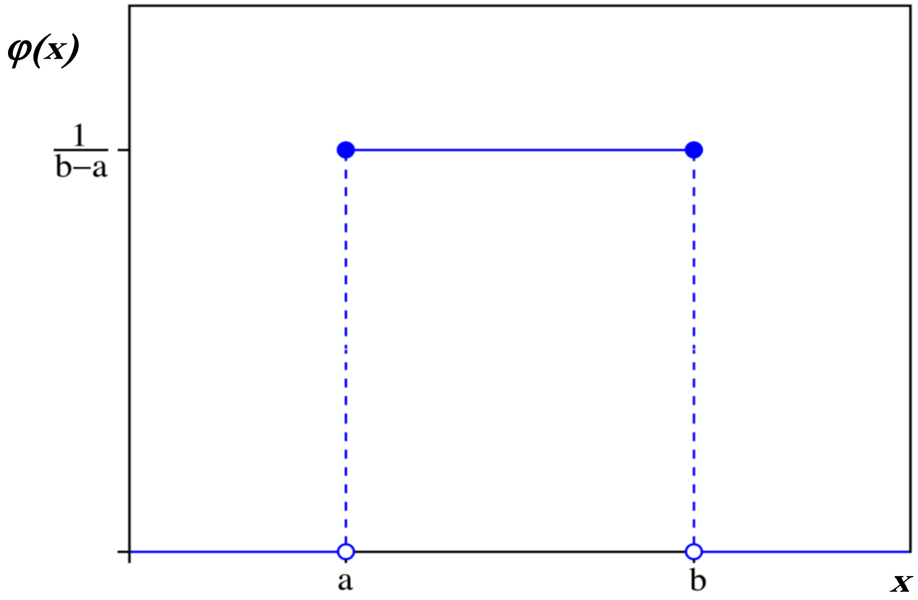
$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_e)^2}{3}}$$

Rozkład jednostajny

- Gęstość prawdopodobieństwa w przedziale od *a* do *b* jest stała i różna od zera, a poza nim równa zeru
- Funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu jednostajnego:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{3}} \qquad -\sigma\sqrt{3} \le x-\mu \le \sigma\sqrt{3}$$

$$\varphi(x) = 0 \qquad \textit{dla pozostałych } x$$



Niepewność standardowa obliczana metodą typu B jest równa odchyleniu standardowemu

- Wartość oczekiwana: $\mu = \dfrac{a+b}{2}$

- Wariancja: $\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

a = - Δx

b = Δx

$$u(x) = \sqrt{\sigma^2} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

Obliczanie niepewności standardowej typu B – przykłady: przyrządy mechaniczne

- Linijka, śruba mikrometryczna, suwmiarka
- Termometr, barometr analogowy
- Stoper
- Wszystkie przyrządy analogowe niebędące miernikami

Dokładność wzorcowania Δx:

połowa działki elementarnej

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

Obliczanie niepewności standardowej typu B – przykłady: mierniki analogowe

Zakres pomiarowy – największa wartość jaką może zmierzyć przyrząd pomiarowy przy określonym ustawieniu pokrętła (klawisza, przycisku,…) wyboru zakresu.

Klasa przyrządu dokładność z jaką przyrząd pomiarowy przekształca sygnał pomiarowy na wskazanie odczytywane przez obserwatora. Klasa przyrządu jest podawana przez producenta w procentach **zakresu pomiarowego**.

Niepewność wzorcowania:

$$\Delta x = \frac{klasa \cdot zakres}{100}$$

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

Niepewność obserwatora:

Niepewność obserwatora może być określona tylko przez obserwatora na podstawie jego doświadczenia

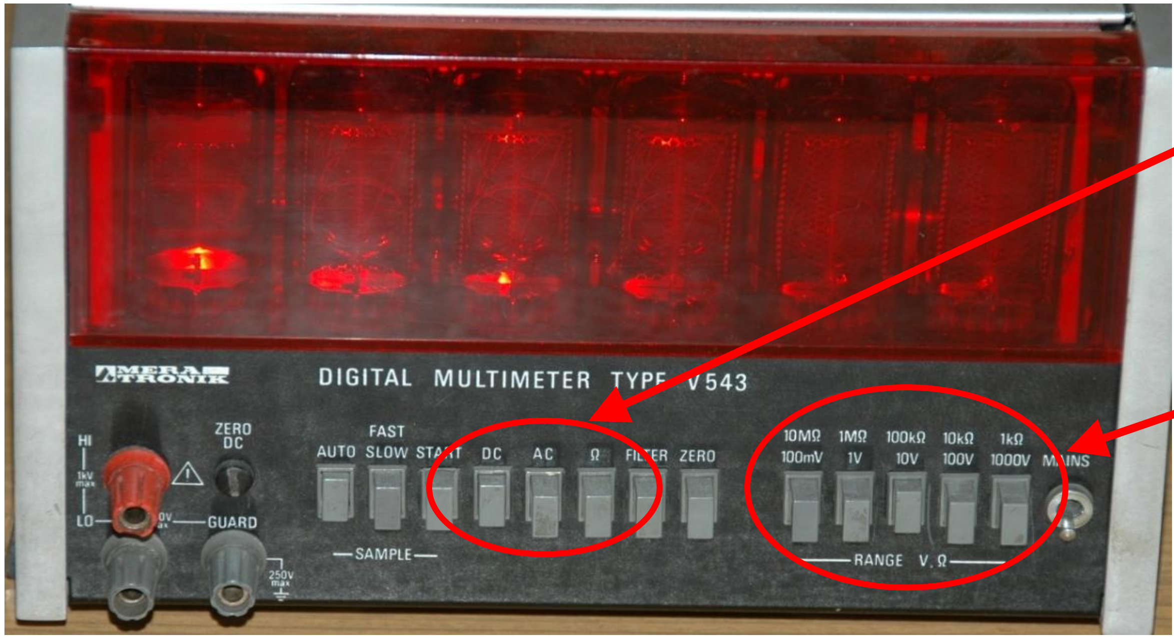
$$u(x) = \frac{\Delta x_e}{\sqrt{3}}$$

Obliczanie niepewności standardowej typu B – przykłady: mierniki cyfrowe

- Niepewność pomiaru dla mierników elektronicznych (cyfrowych):
  - **x** – wielkość mierzona
  - **z** – zakres pomiarowy
  - **c_1, c_2** – współczynniki dla danego przyrządu (podawane na przyrządach lub na tabliczce przy ćwiczeniu **wyrażane w procentach**),
    np. $c_1 = 0{,}1\%$, $c_2 = 0{,}01\%$

$$\Delta x = c_1 x + c_2 z$$

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$



Wybór funkcji

Zakres pomiarowy

Obliczanie niepewności - pomiary bezpośrednie podsumowanie

- Wykonać pomiar wielkości szukanej (pomiar pojedynczy lub seria pomiarowa)
- Obliczyć niepewność typu A
  - Wynik pomiaru – średnia arytmetyczna
  - Niepewność standardowa – odchylenie standardowe wielkości średniej

$$x \equiv \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- Obliczyć niepewność typu B
  - Niepewność wzorcowania Δx
  - Niepewność eksperymentatora Δx_e

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

- Składanie niepewności

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_e)^2}{3}}$$

Pomiary pośrednie

Główne pojęcia

- **Złożona niepewność standardowa** ***(combined standard uncertainty)*** $\boldsymbol{u_c(x)}$ – niepewność standardowa wyniku pomiaru określana, gdy wynik ten jest otrzymywany ze zmierzonych bezpośrednio innych wielkości, czyli w przypadku pomiarów pośrednich (niepewność pomiarów pośrednich obliczana z prawa przenoszenia niepewności pomiaru).
  - Pomiary o wielkościach wejściowych skorelowanych
  - Pomiary o wielkościach wejściowych nieskorelowanych

W laboratorium wszystkie pomiary są pomiarami nieskorelowanymi

Obliczanie niepewności - pomiary pośrednie podsumowanie

- Wykonać pomiary k wielkości mierzonych bezpośrednio (pojedyncze lub serie) → $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

- Wyznaczyć **wartości średnie** wielkości mierzonych bezpośrednio i **niepewności standardowe** (mogą być obliczane metodą typu A i/lub typu B) – patrz poprzedni slajd → $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ → $u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_k)$

- Obliczyć **wynik** pomiaru → $\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$

- Obliczyć **niepewność złożoną** (**prawo propagacji niepewności**) →

$$u_c(z) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j)}$$

- Przykład: dla **dwóch** zmiennych (często spotykany przypadek w laboratorium)

$$u_c(z) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)^2 u^2(y)}$$

Pomiary pośrednie – przykład: prawo Ohma

Prawo Ohma: **R_x=U/I. Niech x oznacza U, a y oznacza I**

$$u_c(z) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 u^2(y)}$$

= 1/I **= U/I²**

$$u_c(R_x) = \sqrt{\left(\frac{1}{I}u(U)\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2}u(I)\right)^2}$$

wkład do całości niepewności wnoszony przez pomiar napięcia

wkład do całości niepewności wnoszony przez pomiar natężenia prądu

Główne pojęcia

- **Niepewność rozszerzona *(expanded uncertainty) U(x)*** lub ***$U_c(x)$*** – wielkość określająca przedział wokół wyniku pomiaru, od którego oczekuje się, że obejmuje ***przeważającą*** część wyników (wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej).
  - Niepewność standardowa *u(x)* wyznacza przedział, w którym z określonym prawdopodobieństwem znajduje się poszukiwana, mierzona wartość
    - Niepewność typu A: prawdopodobieństwo 68%
    - Niepewność typu B: prawdopodobieństwo 58%
  - Cel wprowadzenia niepewności rozszerzonej:
    - Porównywanie wyników uzyskanych w różnych laboratoriach, w innych warunkach
    - Porównanie z wartością tablicową lub teoretyczną
    - Do celów komercyjnych
    - Do ustalania norm przemysłowych, zdrowotnych, bezpieczeństwa

Główne pojęcia

- **Współczynnik rozszerzenia *(coverage factor)*** *k* –współczynnik liczbowy, mnożnik niepewności standardowej, stosowany w celu uzyskania niepewności rozszerzonej.

$$U(x) = k \cdot u(x)$$

  k zawiera się w granicach od 2 do 3.
  Dla większości zastosowań, w tym w praktyce laboratoryjnej, zaleca się przyjęcie wartości *k = 2*.

  - Niepewność rozszerzona *U(x)* wyznacza przedział, w którym z określonym prawdopodobieństwem znajduje się poszukiwana, mierzona wartość. Dla *k* = *2*:
    - Niepewność typu A: prawdopodobieństwo 95%
    - Niepewność typu B: prawdopodobieństwo 100% (100% już dla k=1,73!)

Prawidłowy zapis wyników

Prawidłowy zapis wyników pomiarów (1)

- **Zasada zapisu z 2 cyframi znaczącymi – oznacza to, że niepewność ma 2 cyfry znaczące**
- **Zapis wyniku pomiaru (wartości najbardziej prawdopodobnej) z dokładnością określoną przez prawidłowy zapis niepewności**
- **Zaokrąglanie zgodnie z zasadami matematyki**

  - **Niepewność standardowa**

    t = 21,364 s, $u(t)$ = 0,023 s

    ***t* = 21,364(23) s, zapis zalecany**

    t = 21,364(0,023) s

  - **Niepewność rozszerzona**

    t = 21,364 s, $U(t)$ = 0,046 s (k = 2) n = 11 ← opcjonalnie

    ***t* = (21,364±0,046) s. zapis zalecany**

Prawidłowy zapis (2) - przykład

Przyjmijmy, że w wyniku pomiarów i obliczeń uzyskano następujące wyniki:

X = 123,4567 m, u(X) = 0,67895 m

1. **Prawidłowy zapis niepewności (z dokładnością do dwóch cyfr znaczących): u(X)=0,68 m**
2. **Prawidłowy zapis wartości najbardziej prawdopodobnej (<u>dokładność</u> zapisu zgodna z <u>dokładnością</u> prawidłowego zapisu niepewności): X=123,46 m**
3. **Prawidłowy zapis wyniku pomiaru wielkości X:**
   X = 123,46(68) m

Prawidłowy zapis wyników pomiarów (3) – przykłady

Wynik pomiarów i obliczeń	**Prawidłowy zapis**
a = 321,735 m/s; $u(a)$ = 0,24678 m/s	a = 321,74 m/s; $u(a)$ = 0,25 m/s a = 321,74(0,25) m/s a = 321,74(25) m/s
b = 321785 m; $u(b)$ = 1330 m	b = 321800 m; $u(b)$ = 1300 m b = 321800(1300) m $b = 321{,}8(1{,}3)\cdot 10^3$ m b = 321,8(13) km
C = 0,0002210045 F; $u_c(C)$ = 0,00000056 F	C=0,00022100 F; $u_c(C)$=0,00000056 F $C = 221{,}00(0{,}56)\cdot 10^{-6}$ F $C = 221{,}00(56)\cdot 10^{-6}$ F C = 221,00(56) μF
T = 373,4213 K; $u(T)$ = 2,3456 K	T = 373,4 K; $u(T)$ = 2,3 K T = 373,4(23) K ***U(T)* = 4,7 K** ***T* = (373,4 ± 4,7) K**

Metody weryfikacji hipotez

Weryfikacja hipotezy liniowości

- Wykres funkcji
- Metoda najmniejszych kwadratów
- Testy statystyczne

Wykres funkcji

- Najprostsza, łatwa do zastosowania metoda
- Poprowadzenie teoretycznej funkcji na wykresie prezentującym wyniki pomiarów wraz z uwzględnieniem odcinków niepewności. Poprowadzona prosta powinna przeciąć odcinki niepewności co najmniej **2/3** punktów pomiarowych.
- Jeśli nie – odrzucenie hipotezy o liniowości
- Zasady tworzenia wykresów – patrz strona internetowa laboratorium

Metoda najmniejszych kwadratów

- **Cel:** weryfikacja, czy wielkości zmierzone zależą od siebie w sposób opisany teoretycznie
- **Założenie:** każdą zależność fizyczną można sprowadzić do zależności liniowej **$y = a + b x$**
- **Metoda:** najmniejszych kwadratów – znalezienie prostej, dla której suma kwadratów odległości punktów pomiarowych od tej prostej jest najmniejsza, czyli mówiąc potocznie, znalezienie prostej leżącej „najbliżej" punktów pomiarowych
- **Wyniki obliczeń: a**, **b** oraz **niepewność u(a)** i **niepewność u(b)** (niepewności standardowe obliczane metodą typu A wartości a i b)

Metoda najmniejszych kwadratów

$$y = ax + b$$

$$\tilde{x}_i = x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

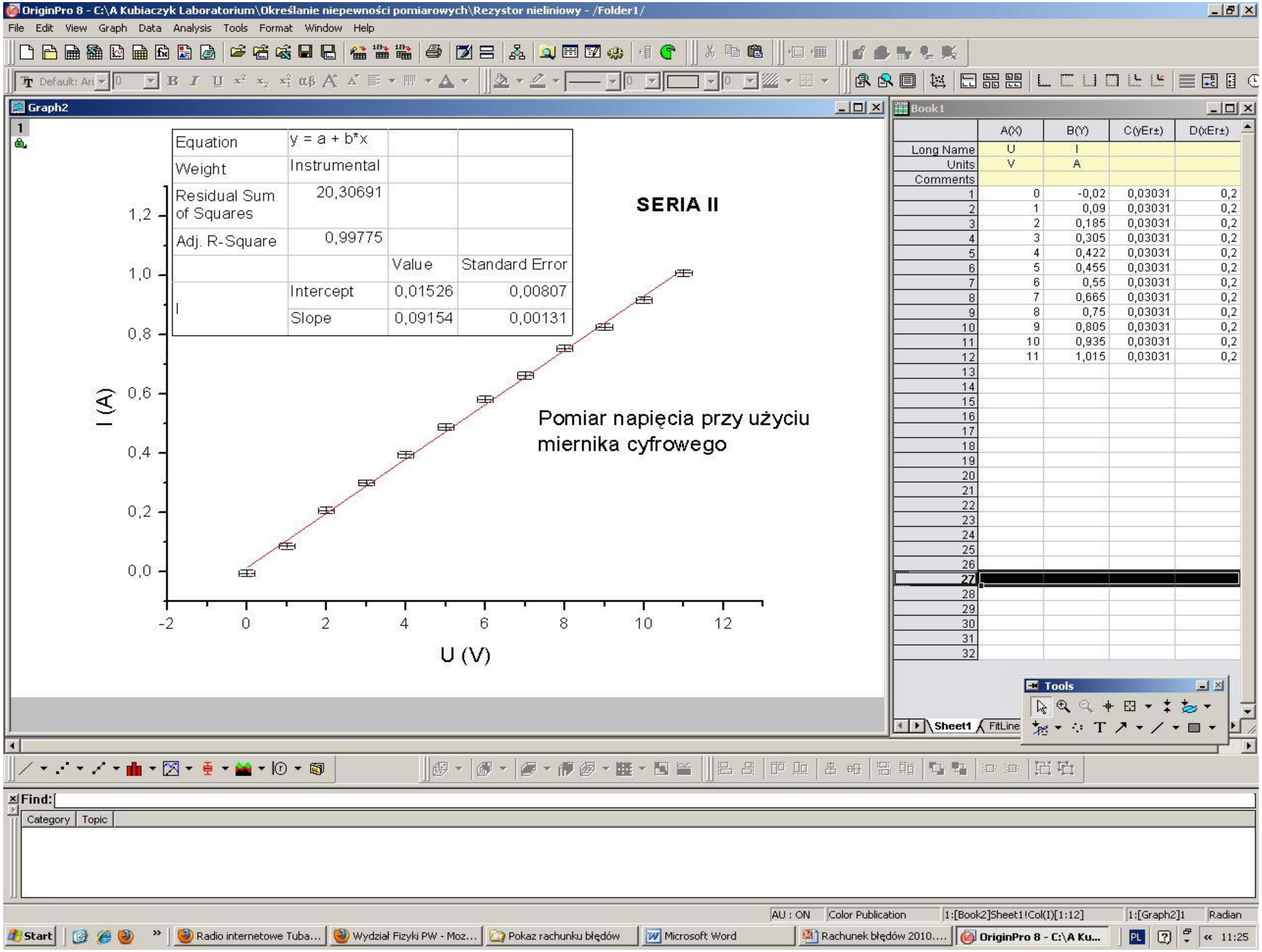
$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2} \qquad \bar{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{\bar{a}}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\tilde{d}_i = y_i - \bar{a}\tilde{x}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

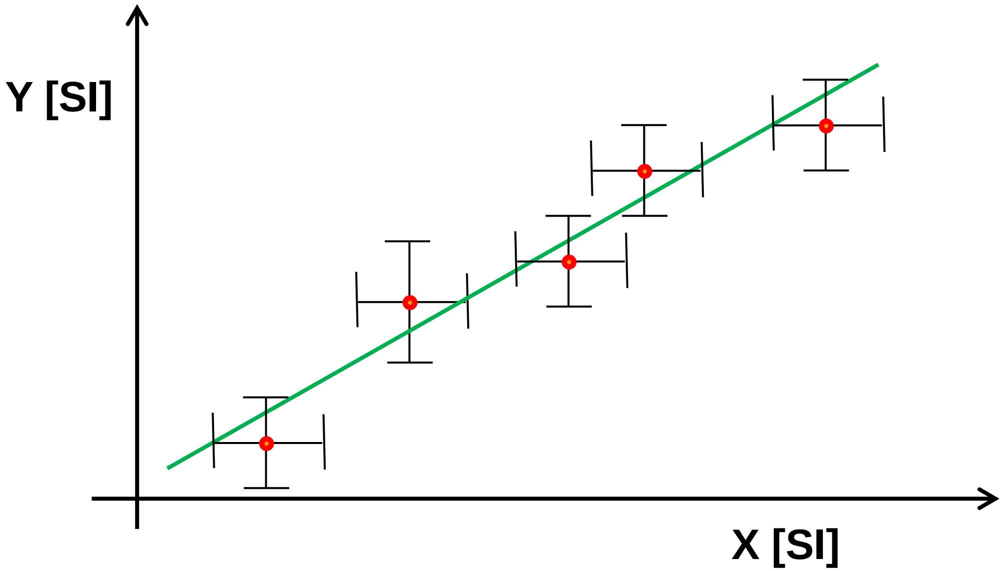
$$s_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2}} \qquad s_{\bar{b}} = s_{\bar{a}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

Dokładne wzory wykorzystywane przez większość programów wykonujących dopasowanie funkcji liniowej do danego zbioru punktów pomiarowych

Metoda najmniejszych kwadratów



MNK – jak to działa?



Zakładamy, że poszukiwana zależność Y(X) jest **liniowa**:

$$y=ax+b$$

i poszukujemy wartości współczynnika kierunkowego **a**.

Każdy program dopasowujący daje nam:

a, b,

u(a), u(b) (często zwane error)

<u>Są to niepewności TYPU A</u>

Określenie wartości i niepewności współczynnika kierunkowego

1. **<u>Wartość i niepewność typu A</u>** otrzymuje się z dopasowania liniowego (a oraz $u_A(a)$).
2. A co z niepewnością typu B uwzględniającą niepewność pomiarów wielkości Y i X?
3. Wybieramy jeden punkt pomiarowy (x_i, y_i). Dla tego punktu $a=y_i/x_i$.
   <u>Niepewność typu B</u> oblicza się tak jak dla pomiarów pośrednich:

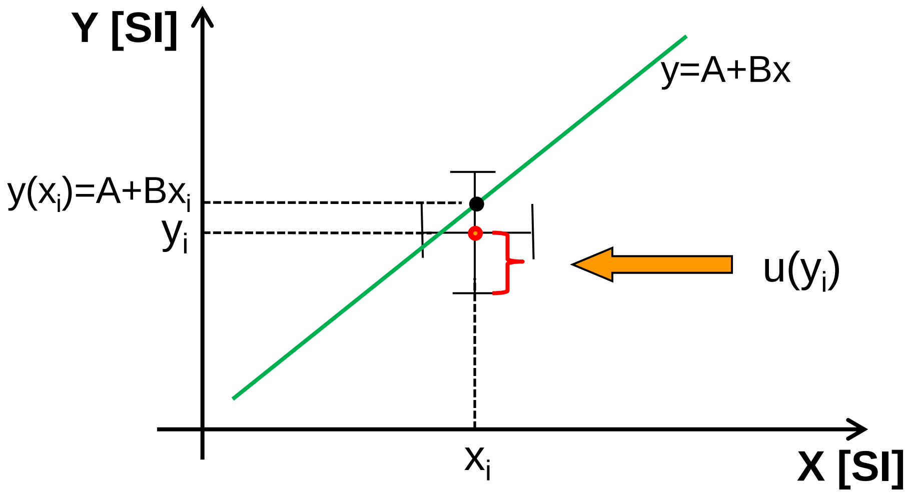
$$u_B(a)=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u(x)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u(y)^2}=\sqrt{\left(\frac{y_i}{x_i{}^2}\right)^2 u(x_i)^2+\left(\frac{1}{x_i}\right)^2 u(y_i)^2}$$

4. I dodajemy obie niepewności z **prawa przenoszenia niepewności**!

$$u(a)=\sqrt{u_A(x)^2+u_B(y)^2}$$

Należy zwrócić uwagę, że różne programy stosują różne oznaczenia w zapisie funkcji liniowej: y=ax+b (np. Excel) lub y=bx+a (np. Origin)

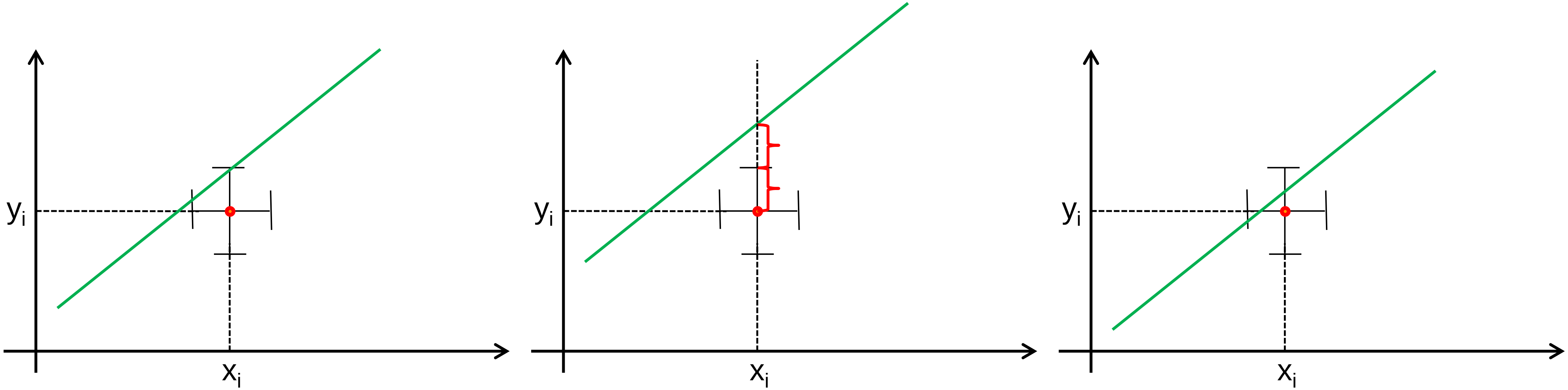
Test χ^2



- Zmienna testowa χ^2 (*dla funkcji y=A+Bx!*)
  - Definicja $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - y(x_i))^2$$
  - Waga statystyczna $$w_i = [u(y_i)]^{-2}$$
  - Przypadek dla funkcji liniowej $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - B(x_i) - A)^2$$
- **Poziom istotności α** – prawdopodobieństwo odrzucenia założonej hipotezy
  - Liczba z zakresu od 1 do 0
  - Wybór zależy od obserwatora (zazwyczaj przyjmuje się wartość **0,05**)
  - Zależność od liczby **stopni swobody** (liczba pomiarów minus liczba wyznaczanych parametrów)
- **Wartość krytyczna $\chi^2_{krytyczna}$** (odczytana z tabeli dla przyjętego poziomu istotności i stopni swobody)

Test χ^2 – Ile wynosi?

Ile wynosi wkład pojedynczego punktu do całej wartości funkcji testowej?



$\chi^2 = ?$ $\chi^2 = ?$ $\chi^2 = ?$

Znajdowanie wartości krytycznej dla testu χ^2

		Poziom istotności α				
		0,20	**0,10**	**0,05**	**0,01**	**0,005**
Liczba stopni swobody	**1**	1,64	2,7	3,8	6,6	7,9
	2	3,22	4,6	6,0	9,2	11,6
	3	4,64	6,3	7,8	11,3	12,8
	4	6,0	7,8	9,5	13,3	14,9
	5	7,3	9,2	11,1	15,1	16,3
	6	8,6	10,6	12,6	16,8	18,6
	7	9,8	12,0	14,1	18,5	20,3
	8	11,0	13,4	15,5	20,1	21,9
	9	12,2	14,7	16,9	21,7	23,6
	10	13,4	16,0	18,3	23,2	25,2
	11	14,6	17,3	19,7	24,7	26,8
	12	15,8	18,5	21,0	26,2	28,3
	13	17,0	19,8	22,4	27,7	29,8
	14	18,2	21,1	23,7	29,1	31,0
	15	19,3	22,3	25,0	30,6	32,5
	16	20,5	23,5	26,3	32,0	34,0
	17	21,6	24,8	27,6	33,4	35,5
	18	22,8	26,0	28,9	34,8	37,0
	19	23,9	27,2	30,1	36,2	38,5
	20	25,0	28,4	31,4	37,6	40,0

- Porównanie wartości krytycznej i doświadczalnej
  - $\chi^2 \leq \chi^2_{krytyczna}$ **- brak podstaw do odrzucenia hipotezy**
  - $\chi^2 > \chi^2_{krytyczna}$ **- odrzucić hipotezę o liniowej zależności**

Test χ^2 (w programie Origin)

- *Equation* (równanie) – funkcja, którą dopasowano do zbioru danych. W przykładzie jest to równanie liniowe $y = a + b*x$.
- *Weight* (waga) – sposób obliczania wagi statystycznej pomiaru. *Instrumental* oznacza, że waga w_i obliczana jest jako kwadrat odwrotności niepewności pomiaru y_i (wielkość pobierana z kolumny niepewności wielkości Y).
- ***Residual Sum of Squares*** – jest to wartość funkcji χ^2 (aby ta wartość została wyświetlona w tabelce z wynikami, konieczne jest zaznaczenie opcji *Residual Sum of Square* w *Quantities to Compute>Fit statistics* w oknie parametrów dopasowania liniowego (*Fit Linear*)).
- *Adj. R-Square* (normowany współczynnik determinacji) – miara dopasowania modelu. Im bliższy jedności, tym dopasowanie do modelu bliższe.
- *Value* (wartość) i *Standard Error* (niepewność standardowa typu A) dla wielkości a i b.
- *Intercept* (wyraz wolny *a*) i *Slope* (współczynnik kierunkowy *b*).

Opis i nazwy parametrów zależą od wersji programu!