

# OKREŚLANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW

(poradnik do Laboratorium Fizyki)

## ROZDZIAŁ 1

### Wstęp

W roku 1995 z inicjatywy Międzynarodowego Komitetu Miar (CIPM) zostały określone międzynarodowe normy opisujące niepewności pomiarowe. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) wydała „*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*”, który stanowi wspólne dzieło uzgodnień dokonanych przez siedem ważnych międzynarodowych organizacji. Zgodnie z umowami międzynarodowymi Polska zobowiązała się do zastosowania normy ISO dotyczącej obliczania i zapisu niepewności pomiarów, podobnie do obowiązku stosowania jednostek układu SI. Polską wersję normy ISO wydał w 1999 roku Główny Urząd Miar i nosi ona tytuł „*Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*” [1]. W dalszej części instrukcji używana będzie skrócona nazwa *Przewodnik*.

Obowiązująca norma wprowadza rozróżnienie między „*niepewnością pomiarów*” a „*błędami*” w potocznym tego słowa znaczeniu oraz przyjmuje jednolitą terminologię i metody określania niepewności pomiaru. Dotychczas słowo „*błąd*” miało dwa znaczenia, jako nazwa dla faktu, że wynik pomiaru jest różny od wartości prawdziwej (często nazywaną wartością rzeczywistą, która jest nieznaną), oraz jako liczbowa miara tego błędu. *Przewodnik* pozostawia i określa dwa znaczenia słowa „*błąd*”: (1) ilościowe, jako różnica (również nieznaną) między wartością zmierzoną i prawdziwą, (2) jakościowe, używane w terminach takich jak błąd systematyczny, przypadkowy i grubość. **Na potrzeby niniejszej instrukcji**, dla uzyskania większej spójności i prostoty rozważań, termin „*błąd*” zostaje zarezerwowany **tylko** dla określenia zjawiska prowadzącego do uzyskania wartości wielkości mierzonej różniącej się znacznie od innych wyników pomiarów tej wielkości. Takie wyniki pomiarów nazywane są „*błędami grubymi*” i nie są brane przy określaniu niepewności pomiarów. Więcej informacji na ten temat znajduje się w dalszej części poradnika.

Celem poradnika jest zaznajomienie studentów z obowiązującymi normami dotyczącymi pomiarów wielkości fizycznych, obliczania i zapisu niepewności pomiarów oraz z metodami wykorzystania tych norm w codziennej praktyce laboratoryjnej przy wykonywaniu i opracowaniu wyników pomiarów w ramach zajęć w Laboratorium Fizyki.

## ROZDZIAŁ 2

### Podstawowe definicje

Jednym z podstawowych terminów nowej normy jest termin „niepewność” (*ang. uncertainty*). W języku potocznym słowo „niepewność” oznacza wątpliwość, a stąd „niepewność pomiaru” oznacza wątpliwość, co do wartości wyniku pomiaru. **Należy jednak podkreślić, że zgodnie z definicją zawartą w Przewodniku „niepewność” jest zawsze liczbą.**

Definicje głównych pojęć związanych z określaniem niepewności pomiaru zaczerpnięto z polskiej wersji *Przewodnika*. W nawiasach (kursywą) będą również podane ich wersje oryginalne (angielskie), aby uniknąć jakiegokolwiek niejednoznaczności, która może pojawić się w przypadku polskiego tłumaczenia pewnych szczególnych terminów. Szczegółowe objaśnienia wszystkich pojęć zostaną podane w kolejnych rozdziałach instrukcji.

- **Pomiar** – zbiór czynności prowadzących do ustalenia wartości wielkości mierzonej.
- **Niepewność pomiaru (*uncertainty*)** – parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.
- **Niepewność standardowa (*standard uncertainty*)  $u(x)$**  – niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego (na przykład odchylenie standardowe średniej). Niepewność można zapisać na trzy różne sposoby:  $u$ ,  $u(x)$  lub  $u$ (przyspieszenie), gdzie wielkość  $x$  może być również wyrażona słownie (w przykładzie  $x$  oznacza przyspieszenie). Należy zawsze jednak pamiętać, że  $u$  nie jest funkcją, tylko liczbą.
- **Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu A (*type A evaluation of uncertainty*)** – metoda obliczania niepewności pomiaru na drodze analizy statystycznej serii wyników pomiarów.
- **Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu B (*type B evaluation of uncertainty*)** – metoda obliczania niepewności pomiaru sposobami *innymi* niż analiza statystyczna serii pomiarowej, czyli na drodze innej niż metoda typu A.
- **Złożona niepewność standardowa (*combined standard uncertainty*)  $u_c(x)$**  – niepewność standardowa wyniku pomiaru określana, gdy wynik ten jest otrzymywany ze zmierzonych bezpośrednio innych wielkości (niepewność pomiarów pośrednich obliczana z prawa przenoszenia niepewności pomiaru).
- **Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*)  $U(x)$  lub  $U_c(x)$**  – wielkość określająca przedział wokół wyniku pomiaru, od którego oczekuje się, że obejmuje dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej. Należy podkreślić, że niepewność standardowa *jednoznacznie* określa wynik pomiaru, jednak *Przewodnik* wprowadza niepewność rozszerzoną, która służy do wnioskowania o zgodności wyniku pomiaru z wynikami uzyskanymi w innych warunkach lub z wartościami tablicowymi oraz do celów komercyjnych i do ustalania norm przemysłowych, zdrowotnych, bezpieczeństwa, itd.
- **Współczynnik rozszerzenia (*coverage factor*)  $k$**  – jest to współczynnik liczbowy, mnożnik niepewności standardowej, stosowany w celu uzyskania niepewności rozszerzonej. Zwykle wartość współczynnika rozszerzenia  $k$  zawiera się w granicach od 2 do 3, jednakże dla specjalnych zastosowań  $k$  może być wybrane spoza tego przedziału. **Dla większości zastosowań, w tym w praktyce laboratoryjnej, zaleca się przyjęcie wartości  $k = 2$ .**

## ROZDZIAŁ 3

### Źródła niepewności pomiaru

Celem pomiaru jest określenie wartości wielkości mierzonej. Tak więc pomiar zaczyna się od określenia wielkości mierzonej, metody pomiarowej (np. porównawcza, różnicowa, mostkowa, itp.) i procedury pomiarowej (zbiór czynności opisanych w szczegółowy sposób i realizowanych podczas wykonywania pomiarów wybraną metodą pomiarową). Wynik pomiaru jest tylko przybliżeniem lub oszacowaniem wielkości mierzonej i dlatego należy go podawać wraz z niepewnością tego oszacowania. Niepewność wyniku obrazuje brak dokładnej znajomości wartości wielkości mierzonej.

**Należy zawsze pamiętać, że pełny (prawidłowy) wynik pomiaru składa się z wartości przypisanej wielkości mierzonej oraz z niepewności pomiaru.**

Istnieje wiele możliwych źródeł niepewności pomiaru, a do najważniejszych należą:

1. niepełna definicja wielkości mierzonej;
  2. niedoskonały układ pomiaru wielkości mierzonej;
  3. niereprezentatywne pomiary, których wyniki mogą nie reprezentować wielkości mierzonej;
  4. niepełna znajomość oddziaływań otoczenia na pomiar albo niedoskonały pomiar warunków otoczenia;
  5. błędy obserwatora w odczytywaniu wskazań przyrządów analogowych;
  6. skończona zdolność rozdzielcza przyrządów;
  7. niedokładne wartości przypisane wzorcom i materiałom odniesienia;
  8. niedokładne wartości stałych i innych parametrów otrzymywanych ze źródeł zewnętrznych;
  9. przybliżenia i założenia upraszczające tkwiące w metodzie i procedurze pomiarowej;
  10. zmiany kolejnych wyników pomiarów wielkości mierzonej w pozornie identycznych warunkach.
- Wymienione przyczyny nie muszą być od siebie niezależne, niektóre z przyczyn od 1 do 9 mogą składać się na przyczyny typu 10.

Norma opisana w *Przewodniku* dzieli składniki niepewności na dwa typy w zależności od metody ich wyznaczania: „typ A” i „typ B” [2].

**Ocena niepewności standardowej typu A** może być oparta na każdej, prawidłowej metodzie statystycznego opracowania danych. Przykładem może być obliczanie odchylenia standardowego średniej dla serii niezależnych obserwacji albo też użycie metody najmniejszych kwadratów w celu dopasowania krzywej do danych i obliczenie parametrów krzywej oraz ich niepewności standardowych.

**Ocena niepewności standardowej typu B** jest zwykle oparta o naukowy osąd badacza biorącego pod uwagę wszystkie dostępne informacje, które mogą obejmować:

- wyniki pomiarów poprzednich,
- doświadczenie i wiedzę na temat zachowania i własności, tak przyrządów, jak i badanych materiałów,
- informacje producentów przyrządów na temat ich własności,
- dane zawarte w protokołach kalibracji przyrządów i innych raportach i
- niepewności przypisane danym zaczerpniętym z podręczników.

W przypadku niepewności standardowej typu B często mówi się nie o obliczaniu, a o **szacowaniu** niepewności, gdyż mamy do czynienia z subiektywnym określeniem prawdopodobieństwa.

## ROZDZIAŁ 4

### Obliczanie niepewności

Jeśli wielkość mierzona można bezpośrednio porównać ze wzorcem lub gdy pomiar wykonywany jest przy użyciu jednego przyrządu dającego od razu gotowy wynik, to taki pomiar nazywa się  *pomiarem bezpośrednim*. Do tego typu pomiarów należą na przykład: pomiar długości przy użyciu linijki, pomiar średnicy pręta przy użyciu śruby mikrometrycznej, pomiar czasu przy użyciu stopera, pomiar natężenia prądu elektrycznego przy użyciu amperomierza, czy pomiar napięcia przy użyciu woltomierza.

Innym typem pomiarów są pomiary bezpośrednie jednej lub kilku wielkości fizycznych, których celem jest określenie wielkości od nich zależnej. Tego typu pomiary nazywa się  *pomiarami pośrednimi*. Należą do nich na przykład: pomiar (wyznaczenie) rezystancji na podstawie pomiarów natężenia prądu i napięcia, wyznaczenie objętości walca na podstawie pomiarów jego średnicy i wysokości, wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego na podstawie długości i okresu drgań wahadła matematycznego.

Metody obliczania niepewności zależą od tego, czy pomiary wykonywane były w sposób bezpośredni lub pośredni.

#### 4.1 Pomiary bezpośrednie

Założmy, że wielkość fizyczna  $X$  jest wyznaczana w sposób bezpośredni i w tym celu została wykonana seria  $n$  pomiarów  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Jeśli wśród tych pomiarów występuje wartość lub wartości odbiegające znacznie od pozostałych (**błędy grube**), to należy je pominąć i nie wolno ich uwzględniać w dalszych obliczeniach. Przyczynami powstawania błędów grubych są najczęściej błędy eksperymentatora (np. odczytanie wartości 121 V zamiast 12,1 V) lub chwilowe zakłócenie warunków pomia-

rowych. Decyzja o uznaniu pomiaru za błąd grubo zależy od eksperymentatora i zazwyczaj jest podejmowana na etapie interpretacji wyników.

### Obliczanie niepewności standardowej typu A

Proces wykonywania pomiarów można porównać do pobierania  $n$ -elementowej próby losowej z nieskończonego zbioru wszystkich możliwych do wykonania pomiarów. Jeśli rozkład prawdopodobieństwa liczb  $x_i$  jest opisany w przybliżeniu krzywą Gaussa (patrz Dodatek B), optymalny sposób opracowania wyników jest następujący. Za wynik pomiaru przyjmuje się średnią arytmetyczną:

$$x \equiv \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Należy pamiętać, że większa liczba wykonanych pomiarów pozwala dokładniej wyznaczyć wartość średnią. Niepewność standardową tego wyniku ( $\bar{x}$ ) pomiaru wielkości fizycznej  $X$  oblicza się z poniższego wzoru, gdzie  $s_{\bar{x}}$  nazywa się **odchyleniem standardowym wielkości średniej**:

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2)$$

### Obliczanie niepewności standardowej typu B

Często w praktyce pomiarowej występują sytuacje, gdy wykonywany jest tylko jeden pomiar (lub po jednym pomiarze każdej z wielkości mierzonych) lub wyniki nie wykazują rozrzutu. Dzieje się tak, gdy urządzenie pomiarowe jest mało dokładne. Na przykład, mierząc wielokrotnie grubość płytki śrubą mikrometryczną otrzymamy różne wyniki, a pomiar tej samej płytki linijką milimetrową da nam zawsze ten sam wynik. Dokładność miernika określa **niepewność wzorcowania  $\Delta x$**  (zwana także **niepewnością graniczną**). Jest to liczba określona przez producenta urządzenia pomiarowego lub oszacowana na podstawie wartości działki elementarnej stosowanego miernika. Oczywistym jest fakt, że prawdopodobieństwo uzyskania dowolnego wyniku mieszczącego się w przedziale wyznaczonym przez wynik pomiaru i dokładność wzorcowania jest takie samo. Tego typu rozkład prawdopodobieństwa nazywa się **rozkładem jednostajnym**, w którym odchylenie standardowe określone jest wzorem  $\Delta x / \sqrt{3}$  (Dodatek B). Przyjmuje się, że jest ono równe niepewności standardowej typu B:

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}. \quad (3)$$

Drugą przyczyną niepewności pomiarów typu B może być **niepewność eksperymentatora  $\Delta x_e$**  określana przez osobę wykonującą pomiary. Wartość jej jest szacowana na podstawie umiejętności i sposobu wykonywania pomiarów. Niepewność standardową oblicza się również przy użyciu wzoru (3), gdzie zamiast  $\Delta x$  należy wstawić  $\Delta x_e$ . Jeśli występują oba źródła niepewności typu B opisane powyżej, to dodają się ich kwadraty niepewności standardowych:

$$u(x) = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_e)^2}{3}}. \quad (3a)$$

### Dodawanie niepewności

Jeśli w pomiarach występują **równocześnie oba typy niepewności** (typu A – rozrzut wyników i typu B – niepewność wzorcowania i eksperymentatora), to należy dodać do siebie ich kwadraty, otrzymując następujący wzór na niepewność standardową (całkowitą):

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_e)^2}{3}}. \quad (4)$$

Należy zwrócić uwagę, że jeśli jedna z obliczonych niepewności jest mniejsza o rząd wielkości od innych, to można tę niepewność pominąć. Wzór (4) należy stosować tylko w przypadku, gdy wyznaczone niepewności są tego samego rzędu.

### Wyznaczanie niepewności wzorcowania i eksperymentatora dla podstawowych przyrządów wykorzystywanych w laboratorium

- **Przyrządy mechaniczne** (linijki, śruby mikrometryczne, suwmiarki) - jako  $\Delta x$  należy przyjmując połowę działki elementarnej. Tak samo określa się niepewność wzorcowania takich przyrządów jak barometry rtęciowe, termometry, stopery, itp.

- **Mierniki analogowe** – jako niepewność wzorcowania  $\Delta x$  należy przyjąć wartość wyznaczoną na podstawie klasy przyrządu i zakresu pomiarowego:

$$\Delta x = \frac{\text{klasa} \cdot \text{zakres}}{100} \quad (5)$$

Niepewność obserwatora jest szacowana przez osobę wykonującą pomiary i powinna odzwierciedlać dokładność odczytu wielkości mierzonej (zakres ruchu wskazówki miernika podczas wykonywania pomiarów). Jeśli drgania wskazówki zawierają się w zakresie połowy działki elementarnej w obie strony, to jest to już uwzględnione w niepewności wzorcowania (patrz definicja rozkładu jednostajnego).

- **Mierniki cyfrowe (elektroniczne)** - niepewność pomiaru określana jest na podstawie danych technicznych przyrządu podanych w instrukcji obsługi. Zależy ona przede wszystkim od wartości wielkości mierzonej  $x$  oraz, zazwyczaj w mniejszym stopniu, od zakresu pomiarowego  $z$ :

$$\Delta x = c_1 x + c_2 z. \quad (6)$$

Liczby  $c_1$  i  $c_2$  należy odczytać z instrukcji przyrządu – dla większości woltomierzy cyfrowych stosowanych w laboratorium  $c_1 = 0,05\%$  i  $c_2 = 0,01\%$ . W wielu przypadkach można przyjąć  $c_2 = 0$ .

Należy pamiętać, że aby obliczyć niepewność standardową typu B, obliczone powyżej wartości  $\Delta x$  należy podzielić przez  $\sqrt{3}$  i ewentualnie skorzystać z prawa propagacji niepewności.

## 4.2 Pomiary pośrednie

Pomiar pośredni wielkości  $Z$  (zwaną wyjściową) polega na wykonaniu pomiarów  $k$  wielkości mierzonych bezpośrednio (zwanymi wejściowymi), które oznaczają się  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Wielkość  $z$  jest funkcją wielkości  $x_k$ :

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ lub w skrócie } z = f(x_k).$$

Dla wielkości fizycznych mierzonych bezpośrednio należy obliczyć ich wartości średnie  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$  oraz niepewności standardowe  $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_k)$ . Niepewności standardowe wielkości bezpośrednich mogą być obliczone zarówno metodą typu A, jak i metodą typu B. Oczywiście w przypadku metody typu B nie ma wartości średniej, a jedynie wynik pomiaru. Wynik pomiaru wielkości  $Z$  oblicza się ze wzoru:

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k).$$

Niepewność pomiaru wielkości  $Z$  nosi **nazwę niepewności złożonej  $u_c$** . Oblicza się ją przy użyciu następującego wzoru (**prawo propagacji niepewności**):

$$u_c(z) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j)}. \quad (7)$$

Po obliczeniu pochodnych należy za  $x_j$  podstawić wartości średnie  $\bar{x}_j$ .

W często występującym przypadku dwóch wielkości mierzonych bezpośrednio ( $x$  i  $y$ ) wzór ten przyjmuje postać:

$$u_c(z) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2 u^2(y)}. \quad (8)$$

Pomiary wielkości mierzonych bezpośrednio można podzielić na pomiary o wielkościach wejściowych *nieskorelowanych* i *skorelowanych* (w skrócie pomiary nieskorelowane i skorelowane). Pomiary nieskorelowane to pomiary, w których każdą wielkość fizyczną bezpośrednio mierzy się w *innym, niezależnym* doświadczeniu (na przykład każdą z wielkości bezpośrednich można mierzyć i obliczać w innym czasie). Przykłady pomiarów nieskorelowanych:

- Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego przy użyciu wahadła matematycznego. Niezależnie wykonuje się pomiary długości wahadła i okresu drgań, a przyspieszenie ziemskie wyznacza ze wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

- Wyznaczenie siły działającej na piezoelektryk. Niezależnie wykonuje się pomiary masy obciążnika, ramienia na którym zaczepiono obciążnik i ramienia na którym działa nieznaną siłą. Siłę wyznacza się

ze wzoru:  $F_x = \frac{mg l_1}{l_2}.$

Pomiary skorelowane, to zgodnie z definicją pomiary wielkości w jakiś sposób wzajemnie zależnych. Pomiary takie polegają na zmierzeniu wszystkich wielkości wejściowych w tych samych warunkach, bez wprowadzania w tym czasie zmian w układzie pomiarowym (pomiar *jednoczesny* przy użyciu *jednego zestawu doświadczalnego*, w jednym doświadczeniu). Jeśli jednak przyjrzyć się dokładnie metodom pomiarowym stosowanym w laboratorium studenckim, to można stwierdzić, że **praktycznie wszystkie pomiary są pomiarami nieskorelowanymi**. Zawsze więc, do obliczania niepewności złożonej należy stosować zależności określone wzorami (7) lub (8).

### 4.3 Niepewność rozszerzona

Niepewność standardowa  $u(x)$  określa przedział od  $\bar{x} - u(x)$  do  $\bar{x} + u(x)$ , w którym wartość prawdziwa znajduje się z prawdopodobieństwem 68% dla niepewności typu A oraz z prawdopodobieństwem 58% dla niepewności typu B (wartości te wynikają z rozkładów prawdopodobieństw: Gaussa i jednostajnego). Niepewność standardowa jest miarą dokładności pomiarów i umożliwia porównanie różnych metod pomiarowych.

Dla umożliwienia porównania wyników pomiarów uzyskiwanych w różnych laboratoriach i warunkach wprowadzono pojęcie niepewności rozszerzonej  $U$ . Służy ona do wnioskowania o zgodności wyniku pomiaru z wynikami uzyskanymi w innych warunkach lub z wartościami tablicowymi. Niepewność rozszerzona wykorzystywana jest do celów komercyjnych i do ustalania norm przemysłowych, zdrowotnych, bezpieczeństwa, itd. Zgodnie z definicją, niepewność rozszerzona jest to zwiększona wartość niepewności standardowej tak, aby w przedziale  $\bar{x} \pm U(x)$  znalazła się **przeważająca** część wyników. Niepewność rozszerzoną oblicza się w sposób następujący:

$$U(x) = k \cdot u(x), \quad (9)$$

gdzie  $k$  nosi nazwę współczynnika rozszerzenia. Dla większości zastosowań przyjmuje się wartość współczynnika rozszerzenia równą 2. Dla  $k = 2$  prawdopodobieństwo znalezienia wartości prawdziwej w przedziale  $\bar{x} \pm U(x)$  wynosi 95% dla niepewności typu A oraz jest równe 100% dla niepewności typu B (prawdopodobieństwo równe 100% uzyskuje się już dla  $k=1,73!$ ).

W danych technicznych przyrządów pomiarowych często jest podawana miara niepewności prezentowanych wielkości. Jeśli nie podano inaczej, jest to zazwyczaj niepewność rozszerzona obliczona dla współczynnika rozszerzenia  $k = 3$ , co odpowiada trzykrotnej wartości odchylenia standardowego wielkości średniej. Wówczas niepewność standardowa odpowiadająca prawdopodobieństwu 68% jest równa 1/3 podanej wartości niepewności.

## 4.4 Prawidłowy zapis wyników pomiaru

Jak już wspomniano wcześniej, wynik pomiaru zapisuje się zawsze wraz z niepewnością. Obie wielkości należy wyrazić w jednostkach podstawowych układu SI (patrz Dodatek A). Prawidłowy zapis wyniku należy rozpocząć od prawidłowego zapisu niepewności. **Niepewność zapisuje się z dokładnością (zaokrągła) do dwóch cyfr znaczących. Wynik pomiaru (czyli wartość najbardziej prawdopodobną) zapisuje się z dokładnością określoną przez prawidłowy zapis niepewności**, co oznacza, że ostatnia cyfra wyniku pomiaru i niepewności muszą stać na tym samym miejscu dziesiętnym. Zaokrąglenie niepewności i wyniku odbywa się zgodnie z zasadami zaokrągleń w matematyce: cyfry 0-4 zaokrągla się w dół (nie ulega zmianie cyfra poprzedzająca), natomiast cyfry 5-9 zaokrągla się w górę (cyfra poprzedzająca zwiększa się o jeden). Zapis wyniku pomiarów można uzupełnić również o liczbę pomiarów stanowiących podstawę obliczeń niepewności.

**Niepewność standardową** można zapisać na kilka sposobów.

(1)  $t = 21,364 \text{ s}, u(t) = 0,023 \text{ s}$

(2)  $t = 21,364(23) \text{ s}$ , – ten sposób jest zalecany i szeroko stosowany, na przykład w publikacjach naukowych lub danych katalogowych

(3)  $t = 21,364(0,023) \text{ s}$

W sposobie (2) w nawiasie należy zapisać **dwie cyfry znaczące** niepewności standardowej, natomiast w sposobie (3) w nawiasie należy zapisać **niepewność standardową** z dokładnością do 2 cyfr znaczących.

**Niepewność rozszerzoną** zapisuje się z użyciem symbolu  $\pm$ .

Dla powyższego przykładu  $U(t) = k \cdot u(t)$ ,  $t = 21,364 \text{ s}$ ,  $U(t) = 0,046 \text{ s}$  ( $k = 2$ ),  $n = 11$   
 $t = (21,364 \pm 0,046) \text{ s}$ .

## ROZDZIAŁ 5

### Pomiary zależności funkcyjnych

Często występującym w laboratorium typem pomiarów pośrednich jest **wielokrotny, prawie jednoczesny** pomiar dwóch zależnych od siebie wielkości  $x$  i  $y$ . Dla **różnych** wartości  $x_i$  otrzymuje się różne wartości  $y_i$ . Wynikiem pomiarów jest  $n$  par liczb  $(x_i, y_i)$ . Dalsze postępowanie zależy od celu wykonywanych pomiarów.

**Jeśli znana jest zależność funkcyjna wiążąca wielkości  $x$  i  $y$  (np.  $y = ax^2$ ), a celem pomiarów jest wyznaczenie parametru funkcji** (w przykładzie parametru  $a$ ), to wielkość mierzona wyznacza się dopasowując do wyników pomiarów znaną zależność funkcyjną. Na podstawie wyników dopasowania określa się niepewność standardową poszukiwanej wielkości równą niepewności standardowej właściwego współczynnika dopasowania (niepewność typu A). Wartość ta nie zależy od niepewności wyników  $x_i, y_i$ . W celu uwzględnienia niepewności pomiarów wartości  $x_i$  i  $y_i$  należy obliczyć niepewność złożoną  $u_c(z)$  dla dowolnego punktu pomiarowego – będzie to niepewność typu B. Oba typy niepewności należy dodać do siebie korzystając z prawa dodawania niepewności (4).

**Jeśli celem pomiarów jest potwierdzenie lub nie zależności funkcyjnej wiążącej wielkości  $x$  i  $y$** , to należy do wyników pomiarów dopasować teoretyczną zależność i sprawdzić stosowalność badanej zależności. Najprostszym przykładem tego typu pomiarów jest sprawdzenie stosowalności prawa Ohma przez pomiar zależności natężenia prądu od przyłożonego napięcia dla nieznannej rezystancji. Istnieje wiele metod dopasowywania określonej zależności funkcyjnej do wyników pomiarów. Najczęściej wykorzystywaną metodą jest metoda najmniejszych kwadratów, która jest opisana w dalszej części instrukcji.

### 5.1 Sprowadzanie zależności funkcyjnych do funkcji liniowej

Poza spotykaną w praktyce inżynierskiej koniecznością wykonania pomiaru wielkości fizycznej i oszacowania jej niepewności, w praktyce laboratoryjnej bardzo często mamy do czynienia z koniecznością sprawdzenia, czy zmierzone wielkości (zazwyczaj dwie) zależą od siebie w sposób opisany teoretycznie. Sprawdzenie modelowej (teoretycznej) zależności pociąga za sobą konieczność wyznaczenia parametrów tej funkcji. Teoretyczne zależności funkcyjne wiążące wielkości fizyczne

mogą być określone równaniami w postaci jawnej lub uwikłanej. Model fizyczny podaje ponadto zakres wartości, dla którego równanie można stosować. Zadaniem eksperymentatora jest przeprowadzenie jak największej liczby pomiarów z zakresu stosowności modelu i dopasowanie parametrów poszukiwanej zależności do wyników pomiarów. Współczesne programy komputerowe pozwalają na dopasowanie dowolnej zależności funkcyjnej do zbioru wyników pomiarów. Większość zależności występujących w fizyce można sprowadzić do zależności liniowej (zlinearyzować). Linearyzacja polega na przekształceniu funkcji  $y = f(x)$  w inną funkcję  $Y = F(X)$ , która będzie miała postać wielomianu 1 stopnia, czyli postać  $Y = bX + a$ . Najczęstszą praktyką w laboratorium fizyki jest dopasowanie wyników pomiarów do funkcji liniowej.

Przykłady przekształceń do funkcji liniowej:

$$\text{Zależność: } y\lambda = 2d \sin x \quad \Rightarrow \quad X = 2 \sin x, \quad Y = y\lambda, \quad b = d$$

$$\text{Zależność: } y = y_0 e^{-\frac{x}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad X = x, \quad Y = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right), \quad b = -\frac{1}{\tau}$$

$$\text{Zależność: } y = y_0 e^{-\frac{x}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad X = \ln\left(\frac{y_0}{y}\right), \quad Y = x, \quad b = \tau$$

Przekształcenia podane powyżej nie są jedynymi, możliwymi do przyjęcia dla funkcji  $y = f(x)$ . Pomiary dają dwa zbiory wyników  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  oraz  $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ , które następnie, przy wykorzystaniu podstawień, należy przekształcić na zbiory  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  oraz  $(Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n)$ . Otrzymane liczby należy umieścić na wykresie, którego zmienną niezależną będzie  $X$ , a zmienną zależną  $Y$ . Kolejnym krokiem jest przeprowadzenie procedury dopasowania tych wyników do linii prostej.

## 5.2 Metoda najmniejszych kwadratów

Najszerzej stosowaną metodą dopasowania liniowego jest metoda najmniejszych kwadratów szczególnie opisana w Dodatku C. Metoda ta polega na znalezieniu takiej prostej, która będzie leżała „najbliżej” punktów pomiarowych, a więc takiego doboru parametrów prostej, aby suma kwadratów różnic wartości doświadczalnych  $y_i$  i obliczonych  $(bx_i + a)$  była jak najmniejsza

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (bx_i + a)]^2 = \min .$$

Procedurę tę można wykonać „ręcznie”, korzystając z zależności podanych w Dodatku C, ale wygodniej posłużyć się dowolnym programem komputerowym który posiada funkcję dopasowania liniowego (*linear fit*) lub regresji liniowej (*linear regression*).

W wyniku obliczeń uzyskuje się wartość współczynnika kierunkowego  $b$  i wyrazu wolnego  $a$  oraz ich niepewności standardowe  $u(b)$  i  $u(a)$ . Istnieją różne warianty metody najmniejszych kwadratów. Najprostszy wariant zakłada nieznaną niepewności pomiarów wielkości  $x_i$  i  $y_i$  oraz ich jednakowość. Wówczas niepewności  $u(b)$  i  $u(a)$  **nie zależą** od niepewności pomiarów. **Metoda najmniejszych kwadratów jest statystyczną analizą serii  $n$  par liczb  $x_i, y_i$ , czyli metodą typu A.**

Przykład zastosowania metody najmniejszych kwadratów wraz z wynikami uzyskanymi w programie MicroCal Origin 8 (przy zastosowaniu funkcji *linear fit*) przedstawiono w Dodatku D.

## 5.3 Weryfikacja hipotezy liniowości

Zgodnie z informacjami podanymi powyżej, wzory regresji liniowej można zastosować do wyników pomiarów dowolnej pary wielkości fizycznych. W wyniku zastosowania metody najmniejszych kwadratów uzyskuje się liniowe przybliżenie zależności między mierzonymi wielkościami. Jednakże zależność liniowa nie zawsze jest dobrym przybliżeniem wyników pomiarów. Programy dopasowujące podają zazwyczaj wartość *współczynnika korelacji*, który jest liczbą z przedziału  $[-1, 1]$  określającą stopień współzależności zmiennych. Jednakże w przypadku większości pomiarów wielkości fizycznych w laboratorium wartość tego współczynnika jest bardzo duża (bliska 1 lub -1) i nie informuje o istnieniu odstępstw pojedynczych punktów od wyznaczonej zależności liniowej. Tak więc użyteczność tego współczynnika jest niewielka. Dlatego też stosuje się dodatkowe testy pozwalające zweryfikować liniowość badanej zależności.



Pierwszym, podstawowym sprawdzeniem zgodności wyznaczonej prostej z wynikami pomiarów jest poprowadzenie prostej teoretycznej na wykresie prezentującym wyniki pomiarów wraz z uwzględnieniem odcinków niepewności. Poprowadzona prosta powinna przeciąć odcinki niepewności co najmniej 2/3 punktów pomiarowych. Jeśli tak nie jest, to nawet mimo bardzo dużej wartości współczynnika korelacji *nie można* twierdzić o liniowej zależności badanych wielkości.

Najczęściej stosowanym narzędziem do weryfikacji postawionej hipotezy jest test  $\chi^2$  (czytaj *chi kwadrat*). Zmienną testową  $\chi^2$  definiuje się w następujący sposób:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - y(x_i))^2, \quad (10)$$

gdzie  $y(x_i)$  oznacza wartość weryfikowanej zależności dla  $x_i$ , a  $w_i$  oznacza wagę statystyczną  $i$ -tego punktu pomiarowego obliczaną w następujący sposób:

$$w_i = [u(y_i)]^{-2}. \quad (11)$$

Patrząc na wzór (10) można łatwo zauważyć, że w przypadku weryfikacji zależności liniowej, w zmiennej testowej  $\chi^2$  wartość  $(y_i - y(x_i))^2$  czyli  $(y_i - b(x_i) - a)^2$ , jest równa kwadratowi różnicy między wartością zmierzoną  $y_i$  a wartością wyznaczonej funkcji liniowej dla  $x = x_i$ . Dla danego pomiaru, wartość ta podzielona przez kwadrat niepewności standardowej powinna osiągać wartość co najwyżej 1. Jeśli jest większa, oznacza to, że wyznaczona prosta nie przechodzi przez pole niepewności. Tak więc w szczególnym przypadku, dla pomiarów dla których wyznaczona prosta przechodzi przez wszystkie odcinki niepewności, **wartość zmiennej testowej  $\chi^2$  nie powinna być większa od  $n$  (liczby pomiarów)**.

Obecność wagi statystycznej ogranicza stosowanie testu  $\chi^2$  do przypadków, w których **znana jest niepewność standardowa** poszczególnych punktów pomiarowych. Wartość liczbowa funkcji  $\chi^2$  jest miarą zgodności wyników doświadczalnych z dopasowaną prostą. Drugim, obok wagi, ważnym parametrem testu  $\chi^2$  jest **poziom istotności  $\alpha$** . Poziom istotności jest prawdopodobieństwem odrzucenia założonej hipotezy, czyli określa stopień pewności badacza, co do liniowości wyników pomiarów. Wartość ta może zawierać się w przedziale od 1 do 0, a jej wybór zależy od osoby wykonującej pomiary i natury badanego zjawiska. Jeżeli wartość będzie zbyt duża, test będzie odrzucał dobre wyniki, natomiast wartość zbyt mała spowoduje akceptację danych, które nie pasują do danej funkcji teoretycznej. W typowym eksperymencie fizycznym przyjmuje się  $\alpha = 0,05$  (i tę wartość należy stosować w laboratorium studenckim). Zaleca się również, aby liczba pomiarów  $n$  nie była mniejsza od 6 (w doświadczeniach studenckich liczba ta powinna zawierać się w przedziale od 6 do 12).

Zastosowanie testu  $\chi^2$  w konkretnym przypadku polega na wyznaczeniu wartości zmiennej testowej  $\chi^2$  dla badanego zbioru wyników i porównaniu tej wartości z **wartością krytyczną** zmiennej  $\chi^2_{krytyczna}$  dla określonego poziomu istotności i danej liczby *stopni swobody*. Liczba stopni swobody jest równa liczbie par wyników pomiarów pomniejszonej o liczbę parametrów użytych do dopasowania zależności teoretycznej – w przypadku metody najmniejszych kwadratów są to dwa parametry ( $B$  i  $A$ ), czyli liczba stopni swobody równa jest  $n-2$ . Wartości krytyczne zmiennej  $\chi^2_{krytyczna}$  są stabilizowane (patrz Dodatek E) i z tabeli należy odczytać jej wartość. Porównanie wartości krytycznej i doświadczalnej może dać dwa wyniki:

1.  $\chi^2 \leq \chi^2_{krytyczna}$ , - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o liniowej zależności danych.
2.  $\chi^2 > \chi^2_{krytyczna}$  - należy odrzucić hipotezę o liniowej zależności danych

Jeśli wartość doświadczalna  $\chi^2$  jest *dużo* mniejsza od wartości krytycznej, to należy zastanowić się, czy nie przyjęto zbyt dużej niepewności pomiarów i czy nie należałoby wykonać jeszcze raz pomiarów przy użyciu dokładniejszych przyrządów.

Jeśli hipoteza o liniowej zależności danych zostaje odrzucona, to należy przyjąć inny, być może bardziej złożony model lub zależność, wykonać procedurę dopasowania i ponownie wykonać test  $\chi^2$ .

Przykład zastosowania testu  $\chi^2$  do sprawdzenia teoretycznej zależności wielkości mierzonych doświadczalnie przedstawiono w przykładzie 3 w następnym rozdziale.

**Podsumowując:** przy pomiarze wielkości skorelowanych, metoda najmniejszych kwadratów pomaga wyznaczyć poszukiwaną wielkość fizyczną wiążącą wielkości mierzone, ale tylko pod pewnymi warunkami. W pierwszej kolejności należy narysować wyznaczoną zależność i sprawdzić, czy przechodzi ona przez odcinki niepewności punktów pomiarowych. Przejście nawet przez wszystkie odcinki nie jest jeszcze potwierdzeniem słuszności przyjętej zależności funkcyjnej. Drugim, ważniejszym warunkiem, jest wykonanie testu  $\chi^2$ , który pozwala z dużym prawdopodobieństwem przyjąć lub odrzucić hipotezę dotyczącą postaci poszukiwanej funkcji.

## ROZDZIAŁ 6

## Przykłady opracowania wyników pomiarów

## Prawidłowy zapis wyników pomiarów

## Wynik pomiarów i obliczeń

## Prawidłowy zapis

$$a = 321,735 \text{ m/s}; u(a) = 0,24678 \text{ m/s}$$

$$a = 321,74 \text{ m/s}; u(a) = 0,25 \text{ m/s}$$

$$\underline{a = 321,74(25) \text{ m/s}}$$

$$a = 321,74(0,25) \text{ m/s}$$

$$b = 321785 \text{ m}; u(b) = 1330 \text{ m}$$

$$b = 321800 \text{ m}; u(b) = 1300 \text{ m}$$

$$\underline{b = 321,8(13) \cdot 10^3 \text{ m}}$$

$$b = 321,8(1,3) \text{ km}$$

$$C = 0,0002210045 \text{ F}; u_c(C) = 0,00000056 \text{ F}$$

$$C = 0,00022100 \text{ F}; u_c(C) = 0,00000056 \text{ F}$$

$$\underline{C = 221,00(56) \cdot 10^{-6} \text{ F}}$$

$$C = 221,00(0,56) \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$C = 221,00(56) \mu\text{F}$$

$$T = 373,4213 \text{ K}; u(T) = 2,3456 \text{ K}$$

$$T = 373,4 \text{ K}; u(T) = 2,3 \text{ K}$$

$$\underline{T = 373,4(23) \text{ K}}$$

$$U(T) = 4,7 \text{ K (k=2)}$$

$$T = (373,4 \pm 4,7) \text{ K}$$

$$R = 7885,666 \Omega; u_c(R) = 66,6667 \Omega$$

$$R = 7886 \Omega; u_c(R) = 67 \Omega$$

$$\underline{R = 7886(67) \Omega}$$

$$R = 7,886(0,067) \text{ k}\Omega$$

$$U_c(R) = 130 \Omega \text{ (k=2)}$$

$$R = (7890 \pm 130) \Omega$$

$$R = (7,89 \pm 0,13) \text{ k}\Omega$$

$$x = 1,12345 \text{ A}; u(x) = 0,00011111 \text{ A}$$

$$x = 1,12345 \text{ A}; u(x) = 0,00011 \text{ A}$$

$$\underline{x = 1,12345(11) \text{ A}}$$

$$x = 1,12345(0,00011) \text{ A}$$

$$y = 1,12 \text{ A}; u(y) = 0,00011111 \text{ A}$$

$$y = 1,12000 \text{ A}; u(y) = 0,00011 \text{ A}$$

$$\underline{y = 1,12000(11) \text{ A}}$$

$$y = 1,12000(0,00011) \text{ A}$$

Należy zwrócić uwagę że:

(1) zapis podkreślony jest zapisem zalecanym,

(2) zapis wytłuszczony dotyczy **jedynie niepewności rozszerzonej**,

(3) prawidłowy jest słowny zapis wyników, np. w przykładzie pierwszym, w sprawozdaniu można napisać: „Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 321,74 m/s z niepewnością standardową 0,25 m/s”, choć zalecany jest zapis podkreślony.

## Przykład 1

Przy użyciu suwmiarki o dokładności 0,1 mm zmierzono bok pręta o przekroju kwadratowym i otrzymano następujące wyniki w milimetrach: 12,5; 12,3; 12,6; 12,5; 12,3; 12,5; 12,7; 12,3; 12,7; 12,4; 12,3. Obliczyć długość boku pręta. Zapisać wynik pomiaru.

Wielkość fizyczną (długość boku pręta -  $d$ ) wyznaczono w sposób bezpośredni wykonując serię pomiarów. Wynikiem pomiaru będzie średnia arytmetyczna określona wzorem (1):

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} d_i = 12,46364 \text{ mm}$$

Suwmiarka ma działkę elementarną równą 0,1 mm, czyli dokładność wzorcowania  $\Delta d$  równa jest 0,05 mm. Tak więc niepewność standardowa typu B ma wartość:

$$u(d) = \frac{\Delta d}{\sqrt{3}} = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,02887 \text{ mm}$$

Istnieje rozrzut wyników pomiarów, dlatego też należy obliczyć niepewność standardową typu A przy użyciu wzoru (2):

$$u(d) = \sqrt{s_d^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2} = \sqrt{\frac{1}{11(11-1)} \sum_{i=1}^{11} (d_i - 12,46364)^2} = 0,047238 \text{ mm}$$

Jak można zauważyć obie niepewności są tego samego rzędu, więc należy posłużyć się prawem dodawania niepewności do uzyskania sumarycznej wartości niepewności standardowej (całkowitej):

$$u(d) = \sqrt{s_d^2 + \frac{(\Delta d)^2}{3}} = \sqrt{0,047238^2 + 0,02887^2} = 0,055361 \text{ mm.}$$

Niepewność standardową można poprawnie zapisać w jeden z trzech sposobów:

$$u = 0,055 \text{ mm}$$

$$u(d) = 0,055 \text{ mm}$$

$$u(\text{boku pręta}) = 0,055 \text{ mm}$$

Prawidłowy zapis wyniku pomiaru:

$$\mathbf{d = 12,464 \text{ mm, } u(d) = 0,055 \text{ mm}}$$

$$\mathbf{d = 12,464(55) \text{ mm}}$$

$$\mathbf{d = 12,464(0,055) \text{ mm}}$$

Jeśli konieczne jest podanie niepewności rozszerzonej (np. do porównania z wartością katalogową), to wynik należy zapisać w sposób następujący:

$$U(d) = k \cdot u(d), d = 12,46 \text{ mm, } U(d) = 0,11 \text{ mm (} k = 2), n = 11$$

$$\mathbf{d = (12,46 \pm 0,11) \text{ mm.}}$$

**Przykład 2 [4]**

W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego przeprowadzono pomiary czasu spadku ciała z pewnej wysokości. Wysokość spadku  $h$  zmierzono trzykrotnie taśmą mierniczą z podziałką milimetrową uzyskując za każdym razem wynik 1270 mm. Czas spadku  $t$  zmierzono pięciokrotnie przy pomocy stopera uzyskując wyniki  $t_1 = 0,509$ ,  $t_2 = 0,512$ ,  $t_3 = 0,510$ ,  $t_4 = 0,504$ ,  $t_5 = 0,501$  (wszystkie wyniki w sekundach). Dokładność stopera wynosiła 0,001 s, zaś niepewność związaną z wyborem chwili włączenia i wyłączenia oszacowano na 0,01 s. Obliczyć przyspieszenie ziemskie i jego niepewność.

Przyspieszenie ziemskie  $g$  należy obliczyć ze wzoru  $g = \frac{2h}{t^2}$ . W pierwszej kolejności, korzystając ze wzoru (1) należy obliczyć wartości średnich wysokości spadku  $\bar{h}$  i czasu spadku  $\bar{t}$ :  
 $\bar{h} = 1270 \text{ mm} = 1,27 \text{ m}$ ,  $\bar{t} = 0,5072 \text{ s}$ . Mając obliczone wartości  $\bar{h}$  i  $\bar{t}$  można obliczyć wartość przyspieszenia ziemskiego:

$$\bar{g} = \frac{2 \cdot 1,27}{0,5072^2} = 9,87359 \text{ m/s}^2.$$

Aby obliczyć niepewność złożoną pomiaru pośredniego  $g$  należy określić niepewności standardowe pomiaru czasu i wysokości.

**Obliczenie niepewności standardowej  $u(t)$  pomiaru czasu:****Niepewność typu A:**

Korzystając ze wzoru (2)

$$u(t) = \sqrt{s_{\bar{t}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} \sum_{i=1}^5 (t_i - 0,5072)^2} = 2,035 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 2,035 \text{ ms}.$$

**Niepewność typu B:**

Niepewność typu B pomiaru czasu związana jest przede wszystkim z niepewnością eksperymentatora włączenia i wyłączenia czasomierza niepewność, a zatem wynosi  $\Delta t_e = 0,01 \text{ s} = 10 \text{ ms}$  (można zaniebawić niepewność związaną z dokładnością czasomierza, gdyż jest ona dziesięciokrotnie mniejsza). Tak więc niepewność standardowa typu B wynosi:

$$u(t) = \frac{\Delta t_e}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5,7735 \text{ ms}.$$

Jak łatwo zauważyć, obie niepewności są tego samego rzędu, więc należy uwzględnić oba typy niepewności i całkowitą niepewność standardową pomiaru czasu obliczyć z prawa dodawania niepewności:

$$u(t) = \sqrt{2,035^2 + 5,7735^2} = 6,122 \text{ ms}.$$

Końcowy zapis wyniku pomiaru czasu należy zapisać w postaci:  **$t = 0,5072(61) \text{ s}$ ,  $n=5$ .**

**Obliczenie niepewności standardowej  $u(h)$  pomiaru wysokości:**

W tym przypadku nie ma rozrzutu wyników, więc niepewność standardową pomiaru wysokości należy oszacować na podstawie niepewności standardowej typu B. Najmniejsza działka taśmy mierniczej wynosi 1 mm, lecz biorąc pod uwagę inne czynniki (pionowość ustawienia miarki, sposób odczytu) rozsądnie będzie przyjąć niepewność pomiaru jako  $\Delta h = 2 \text{ mm}$ .

Tak więc niepewność standardowa typu B wynosi:

$$u(h) = \frac{\Delta h}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15 \text{ mm}.$$

Końcowy zapis wyniku pomiaru wysokości należy zapisać w postaci:  **$h = 1270,0(1,2) \text{ mm}$   
**lub  $h = 1,2700(12) \text{ m}$ ,  $n = 1$ .****

**Obliczenie niepewności złożonej  $u_c(g)$  pomiaru przyspieszenia ziemskiego:**

Jest to pomiar pośredni nieskorelowany, więc należy skorzystać z prawa propagacji niepewności ze wzoru (7):

$$u_c(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 u^2(t)} = \sqrt{\left(\frac{2}{\bar{t}^2}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{4\bar{h}}{\bar{t}^3}\right)^2 u^2(t)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{0,5072^2}\right)^2 \cdot 0,0012^2 + \left(\frac{4 \cdot 1,27}{0,5072^3}\right)^2 \cdot 0,006122^2} = \sqrt{8,7 \cdot 10^{-5} + 0,0564} = 0,237 \text{ m/s}^2.$$

Porównując oba czynniki pod pierwiastkiem można zauważyć, że wkład niepewności pomiaru wysokości w porównaniu do niepewności pomiaru czasu jest pomijalnie mały.

Wynik pomiaru przyspieszenia ziemskiego można zapisać poprawnie na trzy sposoby:

$$\mathbf{g = 9,87 \text{ m/s}^2, u_c(g) = 0,24 \text{ m/s}^2}$$

$$\mathbf{g = 9,87(24) \text{ m/s}^2}$$

$$\mathbf{g = 9,87(0,24) \text{ m/s}^2}$$

#### Obliczenie niepewności rozszerzonej $U_c(g)$ pomiaru przyspieszenia ziemskiego:

Zgodnie ze wzorem (9):

$$U_c(g) = 2 \cdot u_c(g) = 2 \cdot 0,237 \text{ m/s}^2 = 0,474 \text{ m/s}^2.$$

Końcowy rezultat pomiaru przyspieszenia ziemskiego, który można porównać z wartością tablicową jest następujący:

$$\mathbf{g = (9,87 \pm 0,47) \text{ m/s}^2.}$$

Tablicowa wartość przyspieszenia ziemskiego dla Warszawy jest równa  $9,80665 \text{ m/s}^2$ . Wartość tablicowa mieści się w wyznaczonym w doświadczeniu przedziale niepewności, co potwierdza poprawność wykonania eksperymentu.

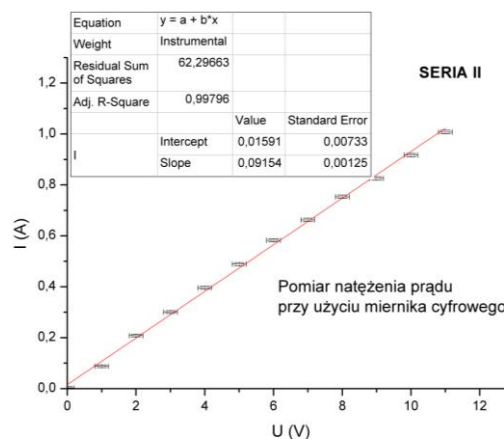
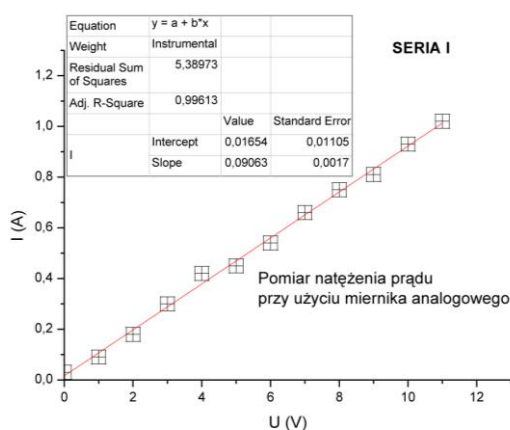
### Przykład 3

Dla sprawdzenia liniowej zależności natężenia prądu płynącego przez rezystor od przyłożonego napięcia wykonano dwie serie pomiarów zależności  $I$  od  $U$  dla tego samego rezystora o nominalnej rezystancji  $10\ \Omega$  i klasie 5% (niepewność rozszerzona równa  $0,5\ \Omega$ ), przy użyciu dwóch różnych amperomierzy. W pierwszym eksperymencie do pomiaru natężenia prądu wykorzystano amperomierz analogowy o klasie 2,5 i zakresie pomiarowym 1,5 A, który miał 50 działek na skali. W drugim eksperymencie do pomiaru natężenia prądu wykorzystano amperomierz cyfrowy, o niepewności pomiarów określonej wzorem (6), w którym  $c_1 = 0,2\%$  i  $c_2 = 0,1\%$  (zakres pomiarowy 10 A). W obu przypadkach napięcie zmierzono woltomierzem analogowym, na zakresie 15 V i klasie 2. Wyniki pomiarów zawarto w poniższej tabeli. Czy na podstawie wyników pomiarów można potwierdzić liniową zależność  $I$  od  $U$ ? Czy wyznaczona wartość rezystancji zgodna jest z danymi producenta?

Wyniki pomiarów:

SERIA I				SERIA II			
$U$ (V)	$I$ (A)	$u_i(y_i)$	$u_i(x_i)$	$U$ (V)	$I$ (A)	$u_i(y_i)$	$u_i(x_i)$
0,0	0,03	0,028	0,17	0,0	0,0030	0,0058	0,17
1,0	0,09	0,028	0,17	1,0	0,0877	0,0059	0,17
2,0	0,18	0,028	0,17	2,0	0,2080	0,0060	0,17
3,0	0,30	0,028	0,17	3,0	0,3005	0,0061	0,17
4,0	0,42	0,028	0,17	4,0	0,3960	0,0062	0,17
5,0	0,45	0,028	0,17	5,0	0,4886	0,0063	0,17
6,0	0,54	0,028	0,17	6,0	0,5823	0,0065	0,17
7,0	0,66	0,028	0,17	7,0	0,6626	0,0065	0,17
8,0	0,75	0,028	0,17	8,0	0,7536	0,0066	0,17
9,0	0,81	0,028	0,17	9,0	0,8255	0,0067	0,17
10,0	0,93	0,028	0,17	10,0	0,9172	0,0068	0,17
11,0	1,02	0,028	0,17	11,0	1,0073	0,0069	0,17

Założono, że napięcie i prąd płynący przez rezystor powiązane są ze sobą prawem Ohma ( $U = R \cdot I$ ), tak więc zależność  $I$  od  $U$  powinna być liniowa.



Obliczenia dopasowania liniowego metodą najmniejszych kwadratów przedstawione na wykresach dla obu serii pomiarów dały wyniki:

#### Seria I

$$B = 0,09063$$

$$A = 0,01654$$

$$\chi^2 = 5,39$$

#### Seria II

$$B = 0,09154$$

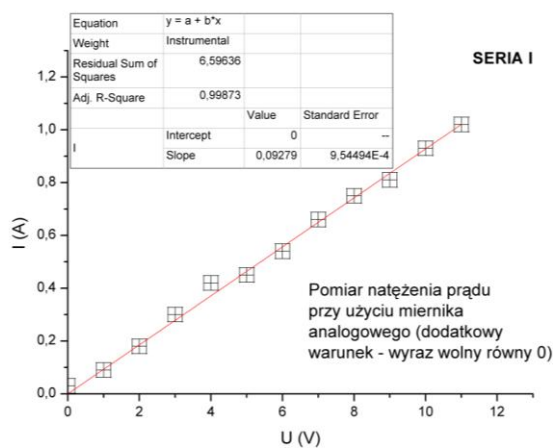
$$A = 0,01526$$

$$\chi^2 = 62,3$$

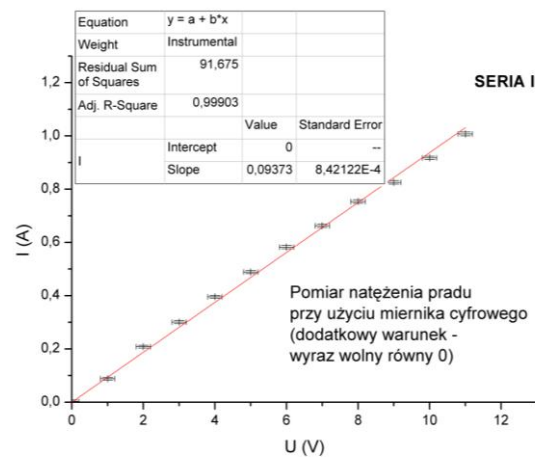
Obie proste regresji liniowej przechodzą przez wszystkie pola niepewności. Współczynniki korelacji i determinacji dla obu serii pomiarowych są podobne i zbliżone do jedności (patrz dodatek D). Wartości współczynników kierunkowych prostych są również do siebie zbliżone. Tak więc wydaje się, że zależność liniowa napięcia i natężenia jest potwierdzona. Jednak można zauważyć, że znacząca różnica pojawia się w wartości funkcji testowej  $\chi^2$ . W omawianym przykładzie liczba stopni swobody

wynosi 10 (12 pomiarów pomniejszone o 2) i dla poziomu istotności 0,05 wartość krytyczna  $\chi^2$  wynosi 18,3. Dlatego też na podstawie pierwszej serii pomiarowej nie ma powodów do odrzucenia hipotezy o zależności liniowej napięcia i prądu –  $5,39 < 18,3$ . Natomiast na podstawie drugiej serii pomiarowej wykonanej przy wykorzystaniu dokładniejszych przyrządów **hipotezę o liniowej zależności obu zmiennych należy odrzucić**. Mała wartość funkcji testowej  $\chi^2$  w pierwszej serii pomiarowej sugeruje pomiary o zbyt dużych niepewnościach, aby mogły służyć one do weryfikacji hipotezy o liniowości lub jej braku. Wątpliwości te potwierdzone zostały w drugiej serii pomiarowej, której wyniki każą odrzucić sprawdzaną hipotezę.

Nieprawdziwość założenia o liniowej zależności napięcia i natężenia znajduje potwierdzenie w kolejnych obliczeniach, w których przyjęto dodatkowo, że funkcja dopasowująca *musi* przechodzić przez punkt (0,0). Jest to równoważne przyjęciu wartości wyrazu wolnego  $A = 0$  – dla napięcia zero-prąd nie powinien płynąć przez rezystor. Przy takim założeniu liczba stopni swobody wynosi 11 (12 pomiarów pomniejszone o 1, bo wyznaczano tylko jeden parametr), a dla poziomu istotności 0,05 wartość krytyczna  $\chi^2$  równa się 19,7. Uzyskano następujące wyniki dopasowania do linii prostej:



SERIA I



SERIA II

**Seria I**

B = 0,09279

 $\chi^2 = 6,59$ **Seria II**

B = 0,09373

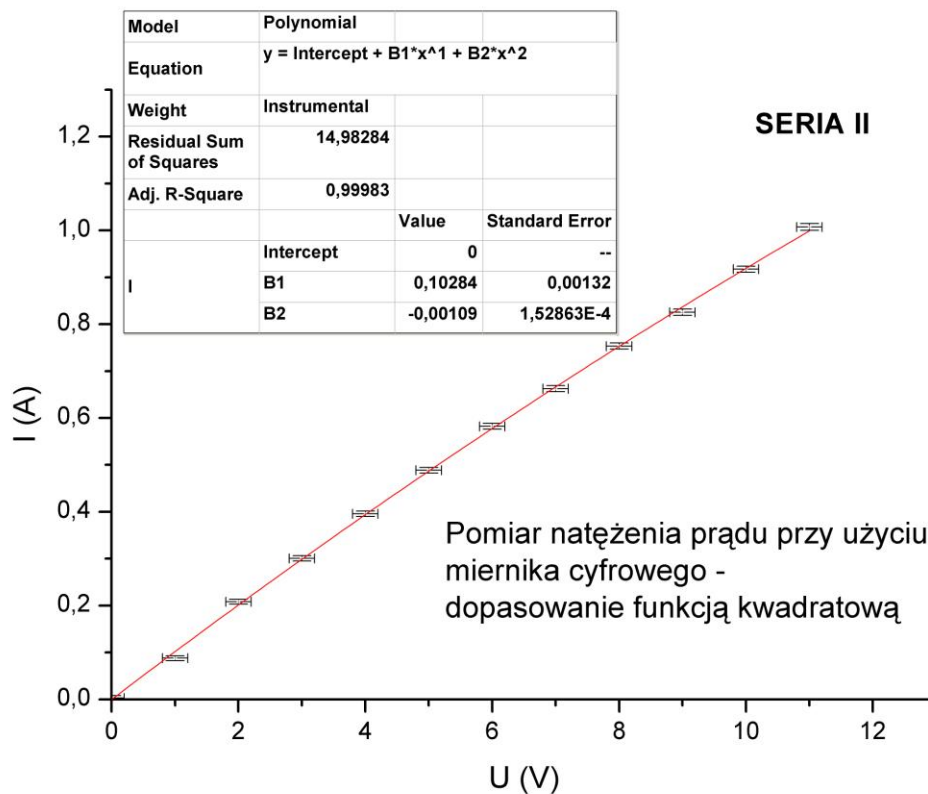
 $\chi^2 = 91,7$ 

Jak widać wartość testowa  $\chi^2$  dla serii pierwszej prawie nie uległa zmianie, natomiast w przypadku drugiej serii zwiększyła się o prawie 50%. Tak więc, tym bardziej należy **odrzuć** hipotezę o liniowej zależności. Może oznaczać to, że rezystancja badanego elementu zależała od przyłożonego napięcia. Dokładne badania wykazały, że podczas wykonywania pomiarów rezystor nagrzewał się wskutek wydzielania ciepła Joule'a-Lenza i jego rezystancja zwiększała się o około 10% przy końcu pomiarów. Przybliżenie wyników pomiarów funkcją teoretyczną, uwzględniającą zmianę rezystancji pod wpływem wydzielającego się ciepła  $I = U/R - k \cdot U^2$  (gdzie k jest stałym współczynnikiem) dało wynik zgodny z założeniem – patrz rys.1 na następnej stronie. Jednocześnie możliwe jest wyznaczenie wartości badanej rezystancji. Wynosi ona  $9,72 \Omega$ , a jej niepewność standardowa  $0,12 \Omega$ . Poprawny zapis do porównania wyników doświadczenia z wartością znamionową ma postać:

$$R = (9,72 \pm 0,24) \Omega.$$

W ten sposób wyznaczona wartość rezystancji zawiera się w przedziale określonym przez producenta rezystora:  $R = (10,0 \pm 0,5) \Omega$ .





Rys. 1 Dopasowanie wyników pomiarów (przykład 3) funkcją kwadratową

Pragnę złożyć podziękowania Pani dr hab. Irmie Śledzińskiej za trud włożony w korektę merytoryczną i językową tekstu i Panu dr. Piotrowi Paneckiemu za inspirację i pomoc udzieloną przy pisaniu rozdziału o weryfikacji hipotez oraz przy opracowaniu przykładu 3. Szczególne podziękowania składam Panu prof. Andrzejowi Ziębie za bardzo szczegółową i krytyczną recenzję, która w dużym stopniu przyczyniła się do końcowej redakcji tekstu.

## Literatura

- [1] *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.
- [2] *Guideline for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurements Results*, NIST Technical Note 1297
- [2] H. SZYDŁOWSKI, *Niepewności w pomiarach*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.
- [3] A. ZIĘBA, *Pracownia fizyczna*, Wydawnictwo AGH, Kraków 2002.
- [4] M. LEWANDOWSKA, *Analiza niepewności pomiarowych*, opracowanie w internecie.
- [5] Wikipedia

## DODATEK A

### Jednostki układu SI

#### A.1 Jednostki podstawowe

**METR (m)** jest to długość drogi przebytej w próżni przez światło w czasie  $1/299792458$  s (XVII Gen. Konf. Miar 1983 r.)

**KILOGRAM (kg)** jest to masa międzynarodowego wzorca tej jednostki masy przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar w Sevres (III Gen. Konf. Miar 1901 r.).

**SEKUNDA (s)** jest to czas równy 9 192 631 770 okresom promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu  $^{133}\text{Cs}$  (XII Gen. Konf. Miar 1964 r.).

**KELWIN (K)** jest to  $1/273,16$  część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody (XIII Gen. Konf. Miar 1967/68 r.).

**MOL (mol)** jest to liczność materii występująca, gdy liczba cząstek jest równa liczbie atomów zawartych w masie 0,012 kg węgla o masie atomowej 12,  $^{12}\text{C}$  (XIV Gen. Konf. Miar 1971 r.).

**AMPER (A)** jest natężeniem prądu nie zmieniającego się, który płynąc w dwóch równoległych prostoliniowych przewodach nieskończenie długich o przekroju kołowym znikomo małym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m, wywołuje między tymi przewodami siłę równą  $2 \cdot 10^{-7}$  niutona na każdy metr długości przewodu (IX Gen. Konf. Miar 1948 r.).

**KANDELA (cd)** jest to światłość, jaką ma w określonym kierunku źródło emitujące promieniowanie monochromatyczne o częstotliwości  $540 \cdot 10^{12}$  Hz i którego natężenie w tym kierunku jest równe  $1/683$  W/sr (XVI Gen. Konf. Miar 1979 r.).

#### A.2 Jednostki uzupełniające

**RADIAN (rd)** jest to kąt płaski, zawarty między dwoma promieniami koła, wycinającymi z jego okręgu łuk o długości równej promieniowi tego koła.

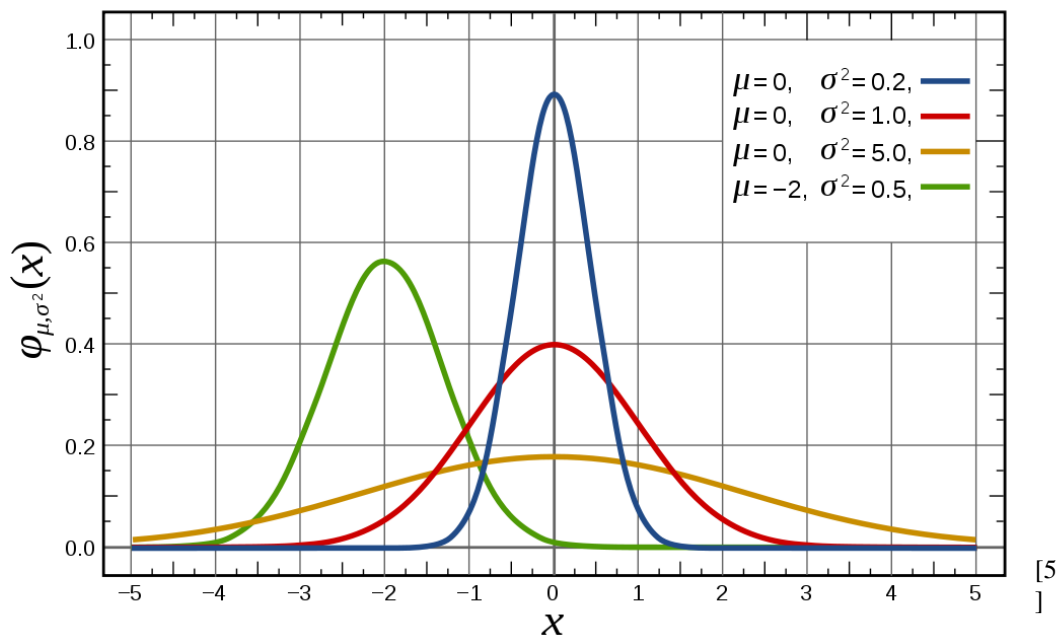
**STERADIAN (sr)** jest kątem bryłowym o wierzchołku w środku kuli, wycinającym z jej powierzchni część równą powierzchni kwadratu o boku równym promieniowi tej kuli.

#### A.3 Zasady tworzenia jednostek wtórnych.

Przedrostek	Oznaczenie	Mnożnik
Eksa	E	$10^{18} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
Peta	P	$10^{15} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
Tera	T	$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$
Giga	G	$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$
Mega	M	$10^6 = 1\ 000\ 000$
Kilo	k	$10^3 = 1\ 000$
Hekto	h	$10^2 = 100$
Deka	da	$10^1 = 10$
-	-	1
Decy	d	$10^{-1} = 0,1$
Centy	c	$10^{-2} = 0,01$
Mili	m	$10^{-3} = 0,001$
Mikro	$\mu$	$10^{-6} = 0,000\ 001$
Nano	n	$10^{-9} = 0,000\ 000\ 001$
Piko	p	$10^{-12} = 0,000\ 000\ 000\ 001$
Femto	f	$10^{-15} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 001$
Atto	a	$10^{-18} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$

## DODATEK B

## B.1 Rozkład Gaussa (rozkład normalny)



Jeśli założymy, że przy wykonywaniu pomiarów uzyskanie pomiaru o wartości większej i mniejszej od wartości średniej jest jednakowo prawdopodobne oraz, że wyniki pomiarów daleko odbiegające od średniej są mniej prawdopodobne niż niewiele różniące się od średniej, to rozkład wyników dla **dużej** liczby pomiarów można przybliżyć krzywą Gaussa:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Funkcja  $\varphi(x)$  nosi nazwę rozkładu Gaussa lub rozkładu normalnego. Zależy ona od dwóch parametrów  $\mu$  i  $\sigma$  (wartości oczekiwanej i wariancji) oraz spełnia warunek normalizacyjny:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

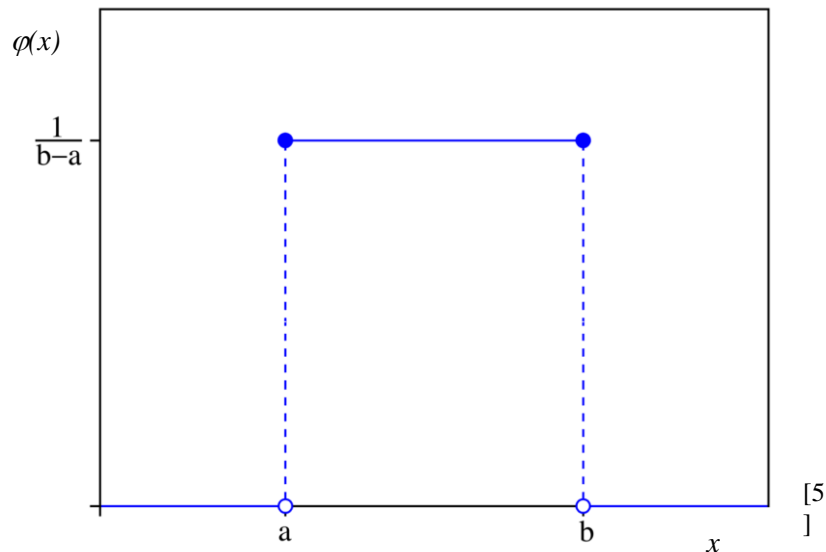
Warunek ten wynika z faktu, że prawdopodobieństwo znalezienia wyniku pomiaru w przedziale od  $x$  do  $x+dx$  jest równe  $\varphi(x)dx$ , a prawdopodobieństwo znalezienia dowolnej wartości w przedziale od  $-\infty$  do  $\infty$  musi być równe 1. Parametry  $\mu$  i  $\sigma$  mają łatwą interpretację analityczną i statystyczną. Dla wartości  $x = \mu$  funkcja  $\varphi(x)$  osiąga maksimum. Parametr  $\sigma$  określa dwa punkty  $\mu - \sigma$  i  $\mu + \sigma$ , gdzie znajdują się punkty przegięcia krzywej Gaussa. Tak więc wartość  $\sigma$  można traktować jako miarę szerokości rozkładu. Z punktu widzenia statystyki, wartość  $\mu$  jest wartością oczekiwaną  $E(X)$  rozkładu, natomiast parametr  $\sigma$  jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji  $D^2(X)$ , czyli odchyleniem standardowym.

Podane poniżej całki oznaczone funkcji  $\varphi(x)$  określają prawdopodobieństwa znalezienia określonej liczby pomiarów (68,3%, 95,4% i 99,7%) w przedziałach, których długość jest kolejną wielokrotnością odchylenia standardowego:

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma} \varphi(x) dx = 0,683, \quad \int_{-2\sigma}^{+2\sigma} \varphi(x) dx = 0,954, \quad \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} \varphi(x) dx = 0,997.$$

**Rozkład Gaussa jest rozkładem ciągłym**, dobrze przybliżającym doświadczalny rozrzut wyników wynikających z przyczyn opisanych w rozdziale 3 niniejszej instrukcji. Można go zastosować do skończonej liczby pomiarów przy obliczaniu niepewności pomiarów typu A. Wówczas wartością oczekiwaną tego przybliżającego rozkładu przyjmujemy średnią arytmetyczną (1), a za odchylenie standardowe, odchylenie standardowe wartości średniej (2).

## B.2 Rozkład jednostajny



Rozkład jednostajny (zwany również rozkładem równomiernym lub prostokątnym) jest to rozkład prawdopodobieństwa, w którym gęstość prawdopodobieństwa w przedziale od  $a$  do  $b$  jest stała i różna od zera, a poza nim równa zero.

Funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu jednostajnego ma postać następującą:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{3}} \quad \text{dla } -\sigma\sqrt{3} \leq x - \mu \leq \sigma\sqrt{3},$$

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{dla pozostałych } x,$$

gdzie  $\mu$  i  $\sigma$  (wartość oczekiwana i wariancja) dane są następującymi wzorami:

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \text{a } \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Jeśli przyjmiemy, że dla niepewności standardowej typu B niepewność wzorcowania wyznacza przedział o szerokości  $2\Delta x$  wokół wartości  $\mu$ , wówczas wzór (3) wynika bezpośrednio z podanej wyżej definicji wariancji (należy do wzorów podstawić  $a = -\Delta x$  i  $b = \Delta x$ ).

### Uwaga dla osób dociekliwych:

Dla rozkładu jednostajnego wartości współczynników rozszerzenia gwarantujące prawdopodobieństwa znalezienia określonej liczby pomiarów (95,4% i 99,7%) w przedziałach, których długość jest kolejną wielokrotnością odchylenia standardowego jest inna, niż dla rozkładu normalnego. 95% otrzymuje się dla  $k = 1,65$ , 99% dla  $k = 1,71$ , a dla  $k = 1,73$  uzyskuje się już 100%.

## DODATEK C

### Metoda najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów jest najpowszechniej stosowaną metodą analityczną dopasowania prostej do zbioru punktów doświadczalnych. Nazwę zawdzięcza kryterium jakości dopasowania – takiego doboru parametrów prostej, aby suma kwadratów różnic wartości doświadczalnych  $y_i$  i obliczonych ( $Bx_i + A$ ) była jak najmniejsza

$$S^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (Bx_i + A)]^2 = \min.$$

W celu znalezienia parametrów  $B$  i  $A$  korzysta się ze warunku na minimum funkcji dwóch zmiennych:

$$\frac{\partial S^2}{\partial B} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial S^2}{\partial A} = 0.$$

Obliczenie obu pochodnych cząstkowych prowadzi do powstania układu równań liniowych dla niewiadomych  $B$  i  $A$ . Dalsze obliczenia przedstawiono w formie wygodnej do obliczeń ręcznych.

Dla każdego punktu pomiarowego należy określić wartości funkcji pomocniczych  $\tilde{X}_i$ ,  $\tilde{Y}_i$  oraz  $\tilde{d}_i$ :

$$\tilde{X}_i = X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \tilde{Y}_i = Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \tilde{d}_i = Y_i - \bar{B}\tilde{X}_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Następnie należy wyznaczyć wartość współczynnika kierunkowego prostej  $B$  oraz wyrazu wolnego  $A$  (rzędnej punktu przecięcia prostej z osią  $OY$ ):

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i \tilde{Y}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2} \quad A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{B}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Natomiast zależności:

$$u(B) = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{d}_i^2}{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2}} \quad u(A) = u(B) \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)^2}$$

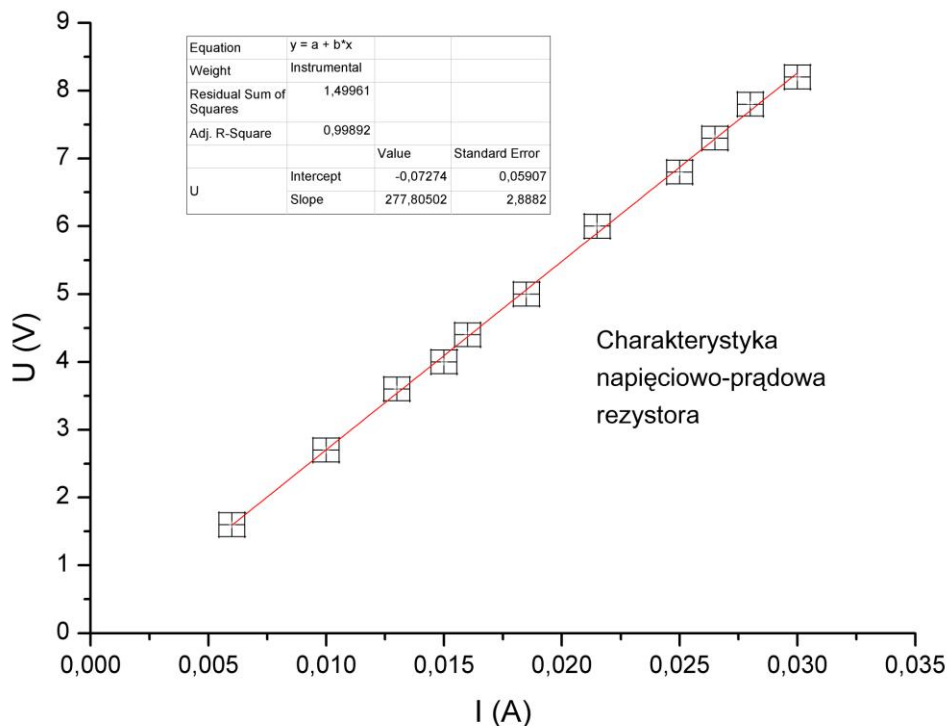
określają niepewność standardową wartości  $B$  oraz  $A$ . Oczywiście, mając do dyspozycji komputer, można posłużyć się dowolnym programem wykonującym obliczenia regresji liniowej (dopasowania liniowego). Na rys. 1 pokazano wyniki liniowego dopasowania przy pomocy programu MicroCal Origin.

## DODATEK D

## Wyniki regresji liniowej w programie MicroCal Origin 8.0

Przykład zastosowania metody najmniejszych kwadratów wraz z wynikami uzyskanymi w programie MicroCal Origin 8 (przy zastosowaniu funkcji *linear fit*) przedstawiono na rys.2. Podstawowe wyniki obliczeń znajdują się w tabelce pojawiającej się automatycznie na wykresie w oknie *Graph*, a szczegółowe informacje na temat dopasowania i wszystkich parametrów obliczeń statystycznych w oknie *Book*, w zakładce *Data*. W tabelce z wynikami na wykresie zawarte są następujące informacje:

- *Equation* (równanie) – funkcja, którą dopasowano do zbioru danych. W przykładzie jest to równanie liniowe  $y = a + b \cdot x$ .
- *Weight* (waga) – sposób obliczania wagi statystycznej pomiaru. *Instrumental* oznacza, że waga  $w_i$  obliczana jest jako kwadrat odwrotności niepewności pomiaru  $y_i$  (wielkość pobierana z kolumny niepewności wielkości  $Y$ ).
- *Residual Sum of Squares* – jest to wartość funkcji  $\chi^2$  (aby ta wartość została wyświetlona w tabelce z wynikami, konieczne jest zaznaczenie opcji *Residual Sum of Square* w *Quantities to Compute>Fit statistics* w oknie parametrów dopasowania liniowego (*Fit Linear*)).
- *Adj. R-Square* (normowany współczynnik determinacji) – podstawowa miara dopasowania modelu. Im bliższy jedności, tym dopasowanie do modelu bliższe.
- *Value* (wartość) i *Standard Error* (niepewność standardowa) dla wielkości  $a$  i  $b$ .
- *Intercept* (wyraz wolny  $a$ ) i *Slope* (współczynnik kierunkowy  $b$ ).



Rys. 2 Dopasowanie wyników linią prostą (regresja liniowa) w programie MicroCal Origin

**DODATEK E****Krytyczne wartości  $\chi^2$  dla różnych poziomów istotności  $\alpha$  i liczby stopni swobody**

		Poziom istotności $\alpha$				
		0,20	0,10	0,05	0,01	0,005
<b>Liczba stopni swobody</b>	<b>1</b>	1,64	2,7	3,8	6,6	7,9
	<b>2</b>	3,22	4,6	6,0	9,2	11,6
	<b>3</b>	4,64	6,3	7,8	11,3	12,8
	<b>4</b>	6,0	7,8	9,5	13,3	14,9
	<b>5</b>	7,3	9,2	11,1	15,1	16,3
	<b>6</b>	8,6	10,6	12,6	16,8	18,6
	<b>7</b>	9,8	12,0	14,1	18,5	20,3
	<b>8</b>	11,0	13,4	15,5	20,1	21,9
	<b>9</b>	12,2	14,7	16,9	21,7	23,6
	<b>10</b>	13,4	16,0	18,3	23,2	25,2
	<b>11</b>	14,6	17,3	19,7	24,7	26,8
	<b>12</b>	15,8	18,5	21,0	26,2	28,3
	<b>13</b>	17,0	19,8	22,4	27,7	29,8
	<b>14</b>	18,2	21,1	23,7	29,1	31,0
	<b>15</b>	19,3	22,3	25,0	30,6	32,5
	<b>16</b>	20,5	23,5	26,3	32,0	34,0
	<b>17</b>	21,6	24,8	27,6	33,4	35,5
	<b>18</b>	22,8	26,0	28,9	34,8	37,0
	<b>19</b>	23,9	27,2	30,1	36,2	38,5
	<b>20</b>	25,0	28,4	31,4	37,6	40,0

Zaznaczona na szaro kolumna, to wartości krytyczne testu  $\chi^2$ , które stosuje się najczęściej w praktyce laboratoryjnej.