Politechnika Warszawska
Wydział Fizyki
Laboratorium Fizyki I „P"
Andrzej Kubiaczyk

25

ZJAWISKO INTERFERENCJI ŚWIATŁA
PIERŚCIENIE NEWTONA, INTERFEROMETR MICHELSONA

1. Podstawy fizyczne

Do najbardziej charakterystycznych zjawisk ruchu falowego należy **interferencja**. W najogólniejszym sformułowaniu, jest to efekt nakładania się fal, w wyniku czego może wystąpić wzmocnienie natężenia fali wypadkowej (fale nakładają się w fazach zgodnych) lub osłabienie (nakładanie się fal o fazach przeciwnych). **Fazą** nazywamy argument funkcji okresowej opisującej rozchodzącą się falę. Aby można było zaobserwować zjawisko interferencji, nakładające się fale muszą posiadać stałą w czasie różnicę faz, tzn. być spójne. Jeśli ten warunek nie jest spełniony, to w pewnych chwilach czasu w danym punkcie przestrzeni fazy są zgodne, powodując wzmocnienie, a w innych chwilach przeciwnie, dając osłabienie. Rezultatem tych szybko zmieniających się wzmocnień i osłabień jest brak stałego w czasie i dającego się zaobserwować obrazu interferencyjnego.

Większość źródeł światła nie jest spójna. Przyczyną tego jest fakt, że każdy atom przechodząc z wyższego poziomu energetycznego na niższy, wysyła krótki ciąg falowy, niezależnie od innych atomów znajdujących się w stanach wzbudzonych. Nawet światło wysyłane przez źródło monochromatyczne (o jednej długości fali) stanowi nałożenie krótkich ciągów falowych wysyłanych w sposób przypadkowy (nieskorelowanych fazowo), a więc źródło jako całość nie jest źródłem spójnym.

Interferencję możemy zaobserwować stosując niespójne źródło światła, jeśli potrafimy zapewnić **spójność wzajemną interferujących promieni** (promień – strumień światła o bardzo małym przekroju). Stosowanym sposobem jest podział promienia biegnącego ze źródła na dwa, z których każdy przebywa inną drogę, a następnie spowodowanie ich ponownego nałożenia. Formalnie można przyjąć, że te dwa promienie są wysyłane przez dwa wzajemne spójne źródła. Spójność wzajemna tych promieni będzie jednak zachowana tylko wtedy, jeżeli różnica przebytych przez nie dróg nie będzie zbyt duża. Jeżeli ten warunek nie zostanie spełniony, wówczas promień, który przebył dłuższą drogę może „nie zdążyć" spotkać się ze swym macierzystym ciągiem falowym i spójność wzajemna nie będzie już zachowana.

1. Interferencja fal.

W rozdziale tym omówimy warunki otrzymania trwałego obrazu interferencyjnego. Rozważania przeprowadzone będą dla układu optycznego składającego się z soczewki i płytki szklanej - powstały obraz nazywamy pierścieniami Newtona. Ogólnie można powiedzieć, że trwały obraz interferencyjny otrzymujemy tylko wtedy, kiedy różnica faz fal o tej samej częstotliwości będzie stała w każdej chwili obserwacji zjawiska.

Załóżmy, że dwie **płaskie, harmoniczne fale elektromagnetyczne 1 i 2** (posiadające identyczną częstotliwość ω i ten sam kierunek polaryzacji liniowej) rozchodzą się w kierunku dodatniego zwrotu osi x. Fale te są opisywane przez wartości natężeń ich pól elektrycznych E_1 i E_2.

Niech fala 2 przebywa dodatkową drogę Δ. Wówczas propagacja fal 1 i 2 może być opisana przez wyrażenia: $\mathbf{E_1 = E_{01}\sin(\omega t - kx)}$ **oraz** $\mathbf{E_2 = E_{02}\sin[\omega t - k(x+\Delta)]}$ gdzie E_{01} i E_{02} oznaczają amplitudy fal 1 i 2, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ jest **liczbą falową** a λ – **długością fali** (w powietrzu). Gdy fala 2 przebywa dodatkową drogę Δ w innym ośrodku niż powietrze, wówczas zmienia się długość fali w tym ośrodku, a w konsekwencji i liczba falowa k. Jeżeli **współczynnik załamania** na tym odcinku drogi jest równy *n*, to długość fali zmaleje do wartości $\lambda^1 = \frac{\lambda}{n}$, a liczba falowa $k^1 = \frac{2\pi}{\lambda^1} = \frac{2n\pi}{\lambda}$

wzrośnie i wyniesie *nk*. Wyrażenie opisujące falę 2 dla tego przypadku przyjmie postać: $E_2 = E_{02}\sin(\omega t - kx - kn\Delta)$.

Występujący w argumencie funkcji sinus iloczyn ***n*Δ** - nosi nazwę **różnicy dróg optycznych (droga optyczna = współczynnik załamania razy droga geometryczna)**. Natomiast iloczyn *kn*Δ, charakteryzujący zmianę fazy spowodowaną przebyciem dodatkowej drogi optycznej, nazywany jest **kątem przesunięcia fazowego *φ*** ($\varphi = kn\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} n\Delta$).

Matematyczne obliczenia opisujące nałożenie się fal 1 i 2 podano w dodatku, na końcu instrukcji. Wynika z nich, że natężenie fali wypadkowej wynosi:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi \qquad (1)$$

Pierwszy wyraz prawej strony wyrażenia (1) (tj. I_1) jest natężeniem fali 1, drugi natężeniem fali 2, natomiast trzeci opisuje efekt interferencji fali 1 i 2. **W zależności od kąta przesunięcia fazowego** $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n\Delta$, wartość tego wyrazu zmienia się w granicach:

od $-2\sqrt{I_1 I_2}$ (wtedy cosφ = -1, a $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n\Delta = (2m+1)\pi$ gdzie m = 0,1,2,...)

do $2\sqrt{I_1 I_2}$ (wówczas cosφ = 1, a $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n\Delta = m2\pi$).

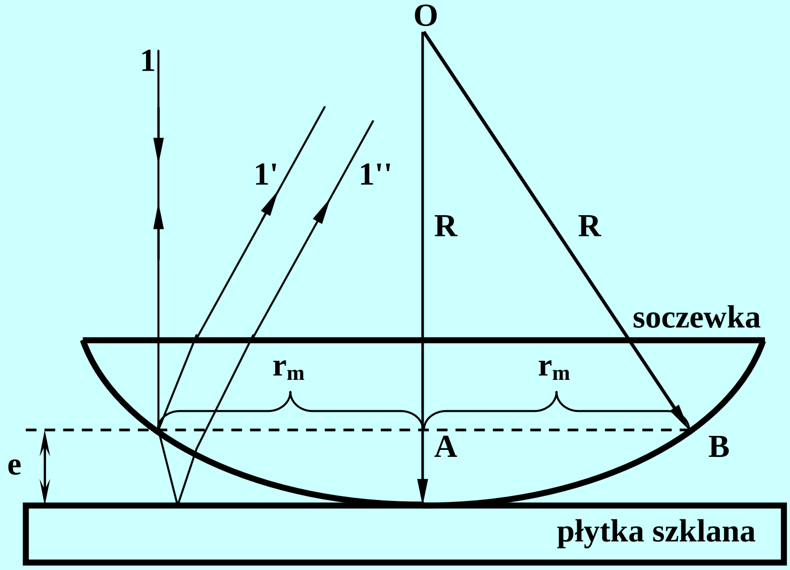
W pierwszym przypadku wystąpi osłabienie natężenia $(I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2})$, a w drugim - jego wzmocnienie $(I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2})$. **Warunek na osłabienie (lub wzmocnienie) natężenia najwygodniej jest formułować w odniesieniu do różnicy dróg optycznych nΔ.** Z powyższych rozważań wynika, że **osłabienie otrzymamy, gdy nΔ=(2m+1)λ/2, a wzmocnienie - gdy nΔ=mλ.**

Rozpatrzmy przypadek szczególny, gdy $I_1 = I_2 = I_0$. Po podstawieniu tych wartości do (1) otrzymamy: $I = 2I_0 + 2I_0\cos\varphi$. Dla wzmocnienia (tj. gdy cosφ = 1) $I = 4I_0$. Oznacza to, że przy nałożeniu fal 1 i 2 wypadkowe natężenie jest aż cztery razy większe od natężenia fali składowej, a nie dwa razy jak tego należałoby oczekiwać. Czyżby zasada zachowania energii przestała tu obowiązywać? To pozorne naruszenie zasady zachowania energii łatwo wyjaśnimy jeżeli zwrócimy uwagę na fakt, że oprócz miejsc gdzie występuje wzmocnienie, dla których $I = 4I_0$, istnieją takie obszary, gdzie otrzymujemy I = 0, a więc wygaszanie. Spotkamy się tu nie z naruszeniem zasady zachowania energii, a tylko z redystrybucją energii w przestrzeni. W powyższych rozważaniach przesunięcie fazy było spowodowane przebyciem dodatkowej drogi Δ. Nie jest to jedyna przyczyna zmieniająca fazę. Odbicie światła w zależności od rodzaju powierzchni odbijającej i kąta padania, może również zmienić fazę (w sposób skokowy). I tak na przykład odbicie światła od ośrodka gęstszego optycznie i będącego izolatorem powoduje przesunięcie fazy fali o π.

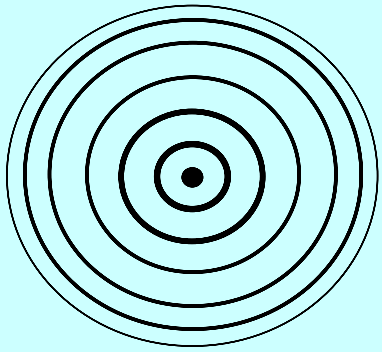
2. Pierścienie Newtona

Połóżmy na płaską płytkę szklaną soczewkę płasko-wypukłą o dużym promieniu krzywizny tak, aby strona wypukła dotykała płytki (rys.1a). Pomiędzy soczewką a płytką utworzy się szczelina powietrza o zmiennej grubości. Oświetlmy teraz ten układ światłem monochromatycznym o długości fali λ biegnącym prostopadle do powierzchni płytki. Promienie odbite od wypukłej strony soczewki (1') będą mogły interferować z promieniami odbitymi od górnej powierzchni płytki (1") gdyż są wzajemnie spójne jako pochodzące z podziału tego samego promienia macierzystego (1) a różnica dróg optycznych między nimi nie jest duża (Δ <100λ). Inne promienie nie spełniają tych warunków.

Zgodnie z wcześniej przedstawionymi rozważaniami wzmocnienie nastąpi gdy: nΔ = *m*λ (*m*=0,1,2,3...) a osłabienie (wygaszenie) jeżeli: $n\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Różnicę dróg optycznych nΔ w naszym przypadku (rys.1a) stanowi odcinek 2e (gdyż n=1 a światło przebywa odcinek e dwukrotnie)



Rys. 1a.Bieg promieni przy powstawaniu pierścieni Newtona:1 - promień macierzysty 1' - promień odbity od wypukłej strony soczewki; 1'' - promień odbity od górnej powierzchni płytki; R - promień krzywizny soczewki; r_m - promień pierścienia Newtona rzędu m.



Rys.1b Obraz pierścieni Newtona w mikroskopie.

Ze względu na zmianę fazy na przeciwną przy odbiciu od środka optycznie gęstszego, należy jeszcze do 2e dodać $\frac{\lambda}{2}$. Eksperymentalnym potwierdzeniem wspomnianego skoku fazy jest powstanie ciemnego krążka w punkcie styku soczewki z płytką (prążek zerowego rzędu). Po uwzględnieniu powyższych uwag warunek na wygaszenie **(pierścienie Newtona są ciemne!)** przybierze postać $2e+\frac{\lambda}{2}=(2m+1)\frac{\lambda}{2}$, a po przekształceniu:

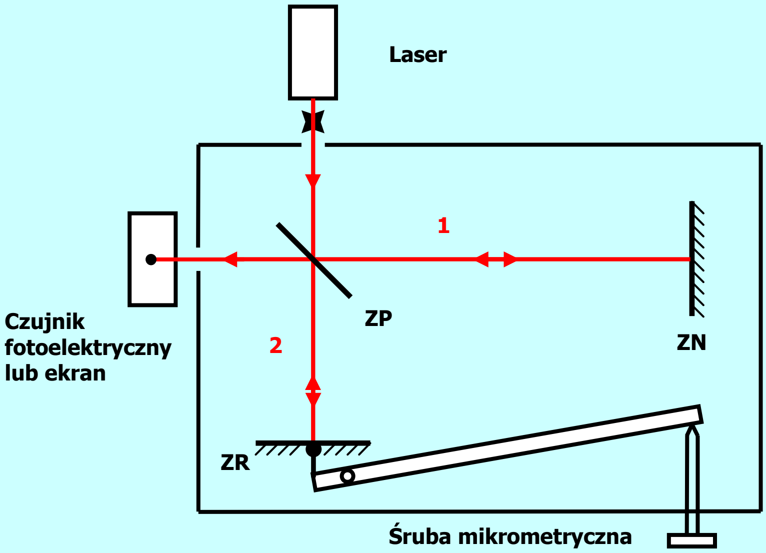
$$2e = m\lambda\ . \qquad (2)$$

Powiążemy teraz e z innymi parametrami, które można stosunkowo łatwo zmierzyć. Z trójkąta AOB (rys.1a) mamy związek: $R^2=r_m^2+(R-e)^2$. Po podniesieniu do kwadratu dostajemy: $R^2=r_m^2+R^2-2\mathrm{Re}+e^2$. Ponieważ e<<R, to wyraz z e^2 można pominąć. Po wykonaniu redukcji dostajemy ostatecznie: $2e=\frac{r_m^2}{R}$. Po podstawieniu tego wyrażenia do (2) otrzymujemy związek łączący promień pierścienia Newtona r_m rzędu *m*, z promieniem krzywizny soczewki R, długością fali λ i rzędem interferencji m:

$$r_m^2 = R\lambda m\ . \qquad (3)$$

Należy jeszcze raz podkreślić, że związek (3) słuszny jest dla **prążków ciemnych**, w przypadku obserwacji promieni odbitych od układu soczewki i płytki.

3. Interferometr Michelsona



Rys.2. Schemat budowy Interferometru Michelsona; ZP - zwierciadło półprzepuszczalne; ZN - zwierciadło odbijające nieruchome ZR - zwierciadło odbijające ruchome

Światło laserowe pada na zwierciadło półprzepuszczalne, które dzieli wiązkę światła na dwie: pierwsza (1) z nich pada na zwierciadło **ZN** i po odbiciu pada na ekran lub ustawiony w tym miejscu czujnik fotoelektryczny; wiązka (2) pada na zwierciadło **ZR** i po kolejnych odbiciach trafia również na ekran. Obie wiązki interferują dając na ekranie obraz interferencyjny. Wygląd tego obrazu zależy od rodzaju wiązki i użytych zwierciadeł. Przy równoległej wiązce i idealnie płaskich zwierciadłach ekran powinien być równomiernie oświetlony (od jasnego do całkowicie ciemnego), a natężenie oświetlenia powinno zależeć od wzajemnego ustawienia obu zwierciadeł, czyli od różnicy dróg optycznych obu wiązek. Przesunięcie zwierciadła ruchomego **ZR** powinno powodować zmiany natężenia oświetlenia ekranu w zakresie od wartości maksymalnej do całkowitego wygaszenia. W układzie laboratoryjnym jest stosowana wiązka rozbieżna (laser jest wyposażony w krótkoogniskową soczewkę), wskutek czego zachodzi zjawisko identyczne do opisywanego wcześniej powstawania pierścieni Newtona. Na ekranie powstają pierścienie interferencyjne. Przesuwanie zwierciadła **ZR** powoduje „przesuwanie się” pierścieni w wyniku zmiany warunków wzmocnienia w danym punkcie ekranu. Należy pamiętać, że przesunięcie zwierciadła o **d** powoduje zmianę różnicy dróg optycznych interferujących promieni o **2d**. Dlatego warunek powstawania maksimów ma postać:

$$N\lambda=2d \tag{4}$$

W przesuwie zwierciadła **ZR zastosowano dźwignię 1:10**, czyli przesunięcie zwierciadła jest dziesięciokrotnie mniejsze niż pokazywane na śrubie mikrometrycznej.

Interferometr Michelsona jest przykładem zastosowania zjawiska interferencji w urządzeniach pomiarowych. Jest on urządzeniem wykorzystywanym najczęściej do pomiaru długości fali świetlnej lub pomiarów bardzo małych przemieszczeń porównywalnych z długością fali użytej do interferencji. Interferometr Michelsona przyczynił się w ogromnej mierze do rozwoju fizyki, gdyż został wykorzystany między innymi w **doświadczeniu Michelsona-Morleya**. Doświadczenie to stanowi podstawę doświadczalną szczególnej teorii względności. Doświadczenie Michelsona-Morleya miało potwierdzić lub zaprzeczyć istnieniu eteru oraz zależności prędkości światła od kierunku, w którym się ono rozchodzi. Decydujące pomiary Albert Michelson i Edward Morley wykonali na początku lipca 1887 roku. Wniosek ich był następujący: *„Nie ma widocznej różnicy w prędkości światła, niezależnie od kierunku, w jakim porusza się obserwator”* (American Journal of Science, nr 207, 1887). 15 stycznia 1931 roku po konferencji naukowej odbył się bankiet na cześć Alberta Einsteina, podczas którego wypowiedział on między innymi następujące słowa: *„Pan czcigodny doktorze Michelson (...) swoją wspaniałą pracą eksperymentalną utorował drogę rozwojowi teorii względności. Odkrył pan podstępny błąd w ówczesnej teorii eteru (...) Pańskie pomiary pierwsze oparły szczególną teorię względności na realnej podstawie.”* W 1907 A. Michelson dostał Nagrodę Nobla (za konstrukcję precyzyjnych instrumentów optycznych i pomiary w dziedzinie spektroskopii i metrologii przy użyciu m.in. interferometru Michelsona).

Należy pamiętać, że Albert Abraham Michelson urodził się 19 grudnia 1852 roku w Strzelnie na Kujawach (wówczas Prusy) w rodzinie kupca żydowskiego. Rodzina Michelsonów opuściła w 1855 Strzelno i przeniosła się do Stanów Zjednoczonych i dlatego we wszystkich encyklopediach A. Michelson figuruje jako uczony amerykański pochodzenia pruskiego (częściej) lub polskiego (niestety rzadziej).

4. Wykonanie ćwiczenia

Pierścienie Newtona.

1. Włączyć monochromatyczne źródło światła o znanej długości fali (np. lampa sodowa o długości fali λ=589,3 nm).
2. Połączyć na stoliku krzyżowym płytkę płasko-równoległą z soczewką i znaleźć ostry obraz pierścieni Newtona.
3. Zmierzyć **średnice** (a nie promienie, gdyż trudno jest określić położenie środka) 10-ciu pierścieni Newtona w kierunku osi x jak i y, notując ich rząd interferencji *m*.
4. Używając światła o nieznanej długości fali zmierzyć średnice 10-ciu pierścieni Newtona (notując *m*). Światło o nieznanej długości fali otrzymuje się przepuszczając światło białe przez filtry interferencyjne).

Interferometr Michelsona

<u>Opis działania elektronicznego częstotliwościomierza-licznika</u>

Urządzenie podłączone do fotodetektora jest urządzeniem uniwersalnym mogącym spełniać rolę, częstotliwościomierza, czasomierza lub licznika impulsów. W ćwiczeniu będzie wykorzystana funkcja licznika impulsów.

1. Włączyć urządzenie – na wyświetlaczu pojawi się na chwilę napis **„P1-F”** i zacznie ono pracować w trybie **częstotliwościomierza**. (Jeśli włączone jest oświetlenie zewnętrzne, to powinno być wskazywana liczba około 100 – dlaczego?).
2. Dwukrotnie nacisnąć prawy górny przycisk oznaczony **UP**. Na wyświetlaczu pojawi się na chwilę napis **„P3-CU”** i zacznie ono pracować w trybie licznika impulsów. (Jeśli włączone jest oświetlenie zewnętrzne, to licznik powinien w sposób ciągły zliczać impulsy od świetlówek).
3. Zgasić światło zewnętrzne – licznik nie powinien zmieniać wyświetlanej wartości.
4. **Lewy dolny przycisk** służy do zerowania licznika. Jeśli śruba mikrometryczna została ustawiona w żądanej pozycji, wyzerować licznik i wówczas na wyświetlaczu powinno pojawić się zero.

UWAGI:

Interferometr jest bardzo precyzyjnym i czułym urządzeniem optycznym. Wszelkie czynności związane z obsługą należy wykonywać z wyjątkową ostrożnością.

Zakres pomiarowy urządzenia podany jest na tabliczce na stanowisku laboratoryjnym.

W trakcie pomiaru śrubę mikrometryczną należy obracać POWOLI, tylko w jednym kierunku (nie należy cofać śruby, gdyż urządzenie zlicza impulsy niezależnie od kierunku ruchu śruby!!).

Prążki powinny być dobrze widoczne, na ekranie w pobliżu otworu fotodetektora powinny mieć szerokość zdecydowanie większą od średnicy otworu przez które przechodzi światło.

Pomiary należy wykonywać przesuwając śrubę o 0,2 – 0,5 mm (przesunięcie zwierciadła jest dziesięciokrotnie mniejsze!).

Wykonanie pomiarów:
1. Na śrubie mikrometrycznej ustawić wartość równą zalecanej, podanej na tabliczce.
2. Wyzerować licznik.
3. Chwycić delikatnie śrubę mikrometryczną i przesunąć POWOLI o na przykład 0,2 mm (nie więcej niż o 0,5 mm).
4. Powtórzyć kilkukrotnie pomiary przesuwając śrubę w obie strony o różne wartości (np. 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 i 0,5 mm) (zwrócić uwagę, aby nie przekroczyć zakresu pomiarowego śruby!!!).

5. Opracowanie wyników

Pierścienie Newtona.
1. Sporządzić wykres zależności r_m^2 w funkcji λ*m* dla światła o znanej długości fali.
2. Stosując metodę najmniejszych kwadratów do wzoru (3), kładąc: $y = r_m^2$ oraz x = λ*m*, obliczyć R. Obliczyć u(R). Z wyniku testu χ^2 odpowiedzieć na pytanie, czy zależność opisana wzorem (3) jest prawdziwa, czy nie?
3. Sporządzić wykres zależności r_m^2 od R*m* (gdzie R - promień krzywizny wyznaczony w punkcie 2) dla źródeł o nieznanej długości fali oraz stosując metodę najmniejszych kwadratów znaleźć nieznane długości fal λ. Obliczyć niepewności złożone $u_c(\lambda)$ i niepewności rozszerzone $U_c(\lambda)$. Zapisać prawidłowo wyniki.
4. Przeprowadzić dyskusję otrzymanych rezultatów.

Interferometr Michelsona
1. Wzór (7) przekształcić do postaci, w której będzie można zastosować metodę najmniejszych kwadratów.
2. Sporządzić właściwy wykres w programie Origin i na podstawie wyników aproksymacji liniowej znaleźć nieznaną długość fali λ. Obliczyć niepewność u(λ).

6. Pytania kontrolne

1. Jakie warunki muszą być spełnione, aby można było zaobserwować zjawisko interferencji?
2. Jak uzyskać wzajemną spójność promieni?
3. Jak obliczyć wypadkowe natężenie interferujących fal?
4. Jakie są warunki uzyskania wzmocnienia (osłabienia) natężenia fali wypadkowej w zjawisku interferencji?
5. Jak otrzymać obraz pierścieni Newtona (ich opis matematyczny)?
6. Co to jest interferometr Michelsona?
7. Jak wyznaczyć długość światła laserowego na podstawie pomiarów przesunięcia prążków w interferometrze Michelsona?

8. Literatura

1. Sz. Szczeniowski, Fizyka Doświadczalna, część IV Optyka, PWN Warszawa 1971, str.275
2. D. Halliday, R. Resnick, Fizyka, t. 2, PWN Warszawa 1984, str. 418 – 428, 493 – 500

Dodatek

Nakładanie się fal - obliczenia matematyczne

Załóżmy, że dwie płaskie, harmoniczne fale elektromagnetyczne 1 i 2 posiadające identyczną częstotliwość ω i ten sam kierunek polaryzacji liniowej rozchodzą się w kierunku dodatniego zwrotu osi x. Fale te są opisywane przez wartości natężeń ich pól elektrycznych E_1 i E_2. Niech fala 2 przebywa dodatkową drogę Δ. Wówczas propagacja fal 1 i 2 może być opisana przez wyrażenia: **$E_1 = E_{01}\sin(\omega t - kx)$ oraz $E_2 = E_{02}\sin[\omega t - k(x+\Delta)]$,** gdzie E_{01} i E_{02} oznaczają amplitudy fal 1 i 2. Obliczmy jaki będzie wynik nałożenia się tych dwóch fal.

$$E = E_1 + E_2 = E_{01}\sin(\omega t - kx) + E_{02}\sin(\omega t - kx - \varphi) \tag{D1a}$$

Detektory fal elektromagnetycznych (w tym nasze oczy) reagują na **natężenie fali I**, tj. **średnią ilość energii padającej na jednostkową powierzchnię w jednostce czasu**. Energia przenoszona przez falę jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola elektrycznego. Dla rozpatrywanego nas przypadku (patrz (1a)) energia będzie więc proporcjonalna do:

$$\begin{aligned} E^2 &= (E_1 + E_2)^2 = \\ &= E_{01}^2\sin^2(\omega t-kx) + E_{02}^2\sin^2(\omega t-kx-\varphi) + 2E_{01}E_{02}\sin(\omega t-kx)\sin(\omega t-kx-\varphi) \end{aligned} \tag{D1b}$$

Zgodnie ze wzorem trygonometrycznym $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, ostatni człon wyrażenia na E^2 możemy przekształcić do postaci następującej:

$$2E_{01}E_{02}\sin\underbrace{(\omega t-kx)}_{\frac{\alpha+\beta}{2}}\sin\underbrace{(\omega t-kx-\varphi)}_{\frac{\beta-\alpha}{2}} = E_{01}E_{02}\{\cos\underbrace{(\varphi)}_{\alpha} - \cos\underbrace{[2(\omega t-kx)-\varphi]}_{\beta}\}$$

Biorąc pod uwagę ostatni wynik, E^2 możemy wyrazić jako:

$$E^2=E_{01}^2\sin^2(\omega t-kx)+E_{02}^2\sin^2(\omega t-kx-\varphi)+E_{01}E_{02}\{\cos\varphi-\cos[2(\omega t-kx)-\varphi]\} \tag{D2}$$

Z równania tego wynika, że energia przenoszona przez falę zależy od czasu. Jednakże detektor rejestruje nie chwilową wartość natężenia fali, ale średnią w czasie wartość strumienia energii. Dla rozpatrywanych fal elektromagnetycznych, można tę średnią policzyć według wzoru:

$$\left\langle E^2 \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E^2 dt \tag{D3}$$

Jak wynika z (D2) i (D3), znalezienie $\langle E^2 \rangle$ sprowadza się do policzenia średnich wartości w okresie funkcji typu $\sin^2(\omega t + \delta)$ i $\cos(2\omega t + \gamma)$. Uśrednienie pierwszej z wymienionych funkcji daje wartość $\frac{1}{2}$ a drugiej 0. Stąd otrzymujemy:

$$\left\langle E^2 \right\rangle = \frac{E_{01}^2}{2} + \frac{E_{02}^2}{2} + E_{01}E_{02}\cos\varphi, \tag{D4}$$

czyli natężenie fali wypadkowej będzie równe:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi. \tag{D5}$$