Politechnika Warszawska
Wydział Fizyki
Laboratorium Fizyki I „P”
Bogna Frejlak

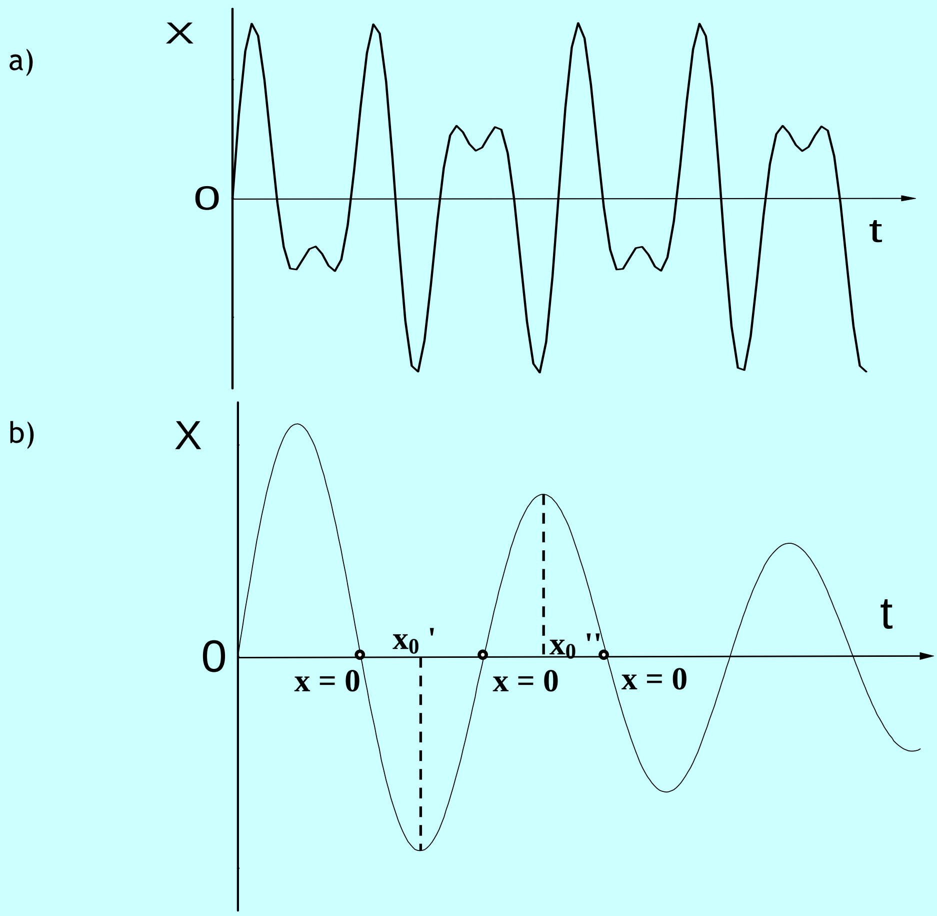
2

DRGANIA PROSTE HARMONICZNE: WAHADŁO REWERSYJNE I TORSYJNE

1. Podstawy fizyczne

Jednym z najczęściej występujących w przyrodzie zjawisk jest zjawisko drgań. Zasadniczą cechą drgań jest okresowość. Rozróżniamy dwa podstawowe rodzaje ruchu drgającego:

a) gdy w równych odstępach czasu powtarza się regularnie ten sam ciąg identycznych stanów układu (rys.1a) – drgania niegasnące.
b) gdy okresowo powtarzają się podobne ciągi stanów układu, lecz wartość maksymalnego wychylenia z położenia równowagi maleje (rys.1b) – drgania gasnące.



Rys.1 a) drgania niegasnące, b) drgania gasnące.

1.1. Ruch harmoniczny

Wśród licznych rodzajów drgań niegasnących najprostszym jest **ruch harmoniczny**. Załóżmy, że na ciało wyprowadzone ze stanu równowagi działa siła, która powoduje powrót ciała do tego stanu, czyli jest skierowana do położenia równowagi oraz jest proporcjonalna do wychylenia od tego położenia. Siłę tę możemy więc zapisać w postaci:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad (1)$$

gdzie x oznacza odchylenie ciała od położenia równowagi, k współczynnik proporcjonalności. II zasada dynamiki Newtona dla ciała o masie m ma wówczas postać następującą:

$$ma = -kx \tag{2}$$

Wiedząc, że przyspieszenie jest drugą pochodną położenia po czasie, równanie (2) można przepisać w postaci:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3}$$

Dzieląc równanie powyższe obustronnie przez m i podstawiając $\frac{k}{m} = \omega^2$ otrzymujemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x\,. \tag{4}$$

Otrzymane równanie nosi nazwę **równania oscylatora harmonicznego**, którego rozwiązaniem ogólnym jest funkcja:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

gdzie x – oznacza **położenie ciała** w chwili t (odległość od początku układu współrzędnych przyjętego w położeniu równowagi). A nazywamy **amplitudą drgań** (jest to maksymalne wychylenie układu z położenia równowagi), argument sinusa ($\omega t+\phi$) – **fazą drgań**, ϕ **przesunięciem fazowym** lub fazą początkową, zaś ω **częstością kołową**. Amplituda i faza początkowa nie zależą od własności układu, określone są natomiast przez tzw. „warunki początkowe", czyli stan układu w chwili t = 0. Częstość kołowa ω zależy od własności układu, nie zależy zaś od amplitudy drgań.

Określimy teraz **okres drgań - T** w ruchu harmonicznym tj. najkrótszy czas po jakim wychylenie, prędkość i przyśpieszenie ruchu przyjmą tę samą wartość. Aby warunek ten był spełniony, faza ruchu musi zmienić się o 2π, czyli: $A\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = A\sin[\omega(t+T) + \phi]$, skąd $\omega T = 2\pi$, a więc:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{6}$$

Ogólnie, ciało wykonywać może jednocześnie kilka ruchów drgających. Ruch jakim porusza się ono wtedy jest wypadkową wszystkich ruchów składowych. W przypadku, gdy rozpatrujemy tylko jeden ruch drgający, można wybrać początek liczenia czasu tak, aby faza początkowa ϕ = 0 (w chwili t = 0 wychylenie jest równe zeru), czyli $x(t) = A\sin(\omega t)$.

1.2. Wahadło fizyczne grawitacyjne

Bryła sztywna umieszczona w polu siły ciężkości i zawieszona na stałej poziomej osi, nieprzechodzącej przez jej środek ciężkości, tworzy tzw. grawitacyjne wahadło fizyczne (rys.2). Odchylona z położenia równowagi wykonuje wokół tego położenia drgania. Każdy jej punkt porusza się po łuku. Gdy odcinek łączący środek ciężkości bryły - S z osią obrotu 0 odchylony jest o kąt α od linii pionowej przechodzącej przez punkt zawieszenia, na bryłę działa moment siły ciężkości:

$$M = -mgd\cdot\sin\alpha \tag{7}$$

gdzie d - jest odległością od osi obrotu do środka ciężkości, znak minus oznacza, że moment ten wywołuje obrót w kierunku przeciwnym do kierunku w którym mierzymy kąt α. Korzystając z rozwinięcia funkcji sinus dla małych kątów na szereg Taylora, $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \ldots$, (kąt α

wyrażamy tu w mierze łukowej) i urywając rozwinięcie na pierwszym wyrazie szeregu, otrzymujemy równanie:

$$M = -mgd\alpha = -D\alpha \qquad (8)$$

Wielkość *D* = *mgd* nazywamy **momentem kierującym**. Jest to maksymalna wartość, jaką może przyjąć moment siły usiłujący przywrócić ciało do położenia równowagi.

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego ma postać:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \qquad (9)$$

gdzie $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ jest **przyśpieszeniem kątowym** ciała, zaś wielkość I jest **momentem bezwładności ciała** względem zadanej osi obrotu ($I = \sum_i^n m_i r_i^2$ dla układu punktów materialnych m_i, których odległości od osi obrotu wynoszą odpowiednio r_i; $I = \int r^2 dm$ dla ciągłego rozkładu masy). Czyli dla wahadła odchylonego o mały kąt:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -D\alpha \qquad (9a)$$

skąd:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{D}{I}\alpha. \qquad (10)$$

Otrzymaliśmy równanie analogiczne do równania (5), a więc rozwiązanie jego będzie miało postać:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \phi), \qquad (11)$$

gdzie **częstotliwość** $\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$, a **okres drgań wahadła fizycznego T** wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \qquad (12)$$

Podstawiając *D* = *mgd* mamy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \qquad (12a)$$

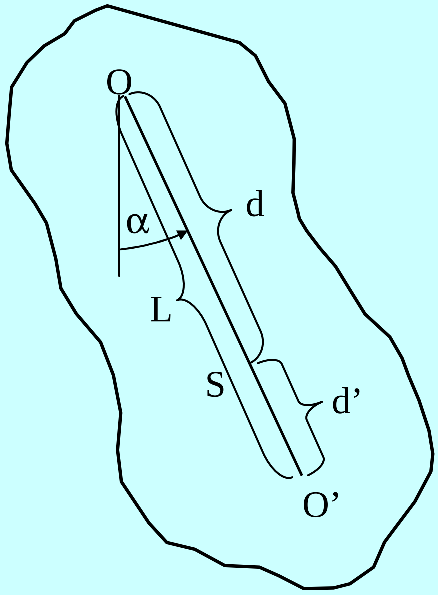
Wprowadzimy teraz pojęcie **długości zredukowanej wahadła fizycznego**.

Długość zredukowana L wahadła fizycznego jest równa takiej długości wahadła matematycznego, które posiada ten sam okres drgań, co dane wahadło fizyczne:

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \qquad (13)$$

Z porównania wyrażeń pod pierwiastkami otrzymujemy:

$$L = \frac{I}{md}. \qquad (14)$$



***Rys. 2 Wahadło fizyczne*.**

Twierdzenie Steinera mówi, że moment bezwładności I bryły względem dowolnej osi równy jest momentowi bezwładności I_0 tej bryły względem osi przechodzącej przez jej środek ciężkości (i równoległej do danej osi), powiększonemu o iloczyn masy tej bryły przez kwadrat odległości między osiami: $I = I_0 + md^2$. Czyli wzór (14) można zapisać w postaci:

$$L = d + \frac{I_0}{md}, \qquad \textbf{(15)}$$

a więc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\left(d + \frac{I_0}{md}\right)\frac{1}{g}}. \qquad \textbf{(16)}$$

Punkt 0' odległy o L od osi obrotu 0 nazywa się środkiem wahań grawitacyjnego wahadła fizycznego.

Wykażemy, że jeśli przez ten punkt przeprowadzimy oś obrotu równoległą do osi pierwotnej, to okres drgań względem nowej osi będzie taki sam, jak okres względem osi pierwotnej, przechodzącej przez punkt 0.

Wahadło odwrócone (o osi obrotu w środku wahań) ma okres drgań T' wyrażający się wzorem:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + md'^2}{mgd'}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{I_0}{md'} + d'\right)}. \qquad \textbf{(16a)}$$

Z rysunku 2 wynika, że L - d = d', zaś z równania (15): $L - d = \frac{I_0}{md}$, czyli $d' = \frac{I_0}{md}$.

Po przekształceniu otrzymujemy: $\frac{I_0}{md'} = d$, a więc:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}(d + d')} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = T \qquad \textbf{(16b)}$$

Fakt ten wykorzystuje się do wyznaczenia przyśpieszenia ziemskiego za pomocą wahadła fizycznego o specjalnej konstrukcji, tzw. **wahadła rewersyjnego, czyli odwracalnego**.

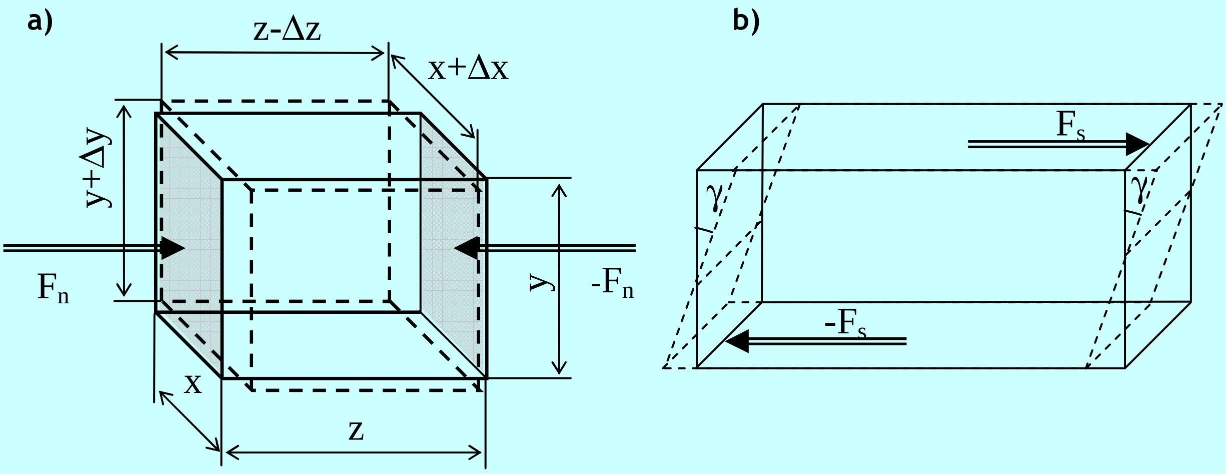
1.3. Wahadło fizyczne torsyjne

W wahadle grawitacyjnym moment kierujący wytwarza siła ciężkości. W wahadle torsyjnym powoduje go siła sprężystości pochodząca od skręconego pręta lub innego ciała sprężystego.

Po odkształceniu ciała sprężystego o kąt α od położenia równowagi powstają w nim drgania pod wpływem momentu siły skręcającej: M' = - Dα zwracającego ciało zawsze do położenia równowagi. Współczynnik proporcjonalności D, podobnie jak w przypadku wahadła grawitacyjnego, nazywamy momentem kierującym. Równanie ruchu ma więc postać analogiczną jak dla wahadła grawitacyjnego (równanie 10), a zatem i okres drgań wyraża się tym samym wzorem: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$. Wielkość D jest tu określona przez własności fizyczne badanego układu.

Rozważmy przypadek, gdy siły działające na ciało powodują jego odkształcenie sprężyste (deformacja znika po ustąpieniu siły odkształcającej F).

W zależności od kąta między wektorem siły działającej a powierzchnią ciała odkształconego, rozróżniamy siły normalne F_n tj. działające prostopadłe do powierzchni, oraz siły styczne do powierzchni, F_s. Takimi właśnie siłami zajmować się będziemy w naszym ćwiczeniu.



Rys.3 Odkształcenie prostopadłościanu pod wpływem sił: a) normalnych, b) stycznych.

Naprężenie styczne – jest to stosunek siły stycznej F_s do powierzchni S, na którą ta siła działa. Efekt działania takiego naprężenia nazywamy ścinaniem prostym.

$$\tau = \frac{F_s}{S} \qquad \textbf{(17)}$$

Odkształcenie mierzy się wtedy za pomocą tzw. kąta ścinania γ tj. kąta jaki tworzy płaszczyzna pierwotna z płaszczyzną obróconą na skutek ścinania (rys.3b i 4b). Między wielkościami τ i γ zachodzi związek znany jako prawo Hooke'a, które przyjmuje postać:

$$\tau = G \cdot \gamma \qquad \textbf{(18)}$$

Współczynnik G – zwany **modułem sztywności lub modułem sprężystości postaciowej** ma wymiar Nm^{-2} rad^{-1} = $Pa \cdot rad^{-1}$. Charakteryzuje on własności sprężyste materiału. Im jest on większy, tym trudniej jest zmienić kształt ciała. Wartości jego wahają się od $1{,}5 \cdot 10^{6}$ $Pa \cdot rad^{-1}$ dla gumy miękkiej, do ok. $8{,}5 \cdot 10^{10}$ $Pa \cdot rad^{-1}$ dla stali.

W naszym ćwiczeniu wielkość G wyznaczamy wykorzystując drgania harmoniczne pręta metalowego zachodzące pod wpływem sił sprężystych. Każdy z elementów badanego pręta, skręconego przez siłę zewnętrzną, podlega deformacji ścinania prostego. Jako reakcja na tę siłę pojawia się w pręcie siła sprężystości powodująca powrót do położenia równowagi i w konsekwencji wywołująca zjawisko drgań.

Drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego $I\varepsilon = M$, możemy zapisać dla tego przypadku w postaci:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\pi G r^4 \alpha}{2L} = -D\alpha \tag{19}$$

gdzie (patrz wyprowadzenie w dodatku):

$$D = \frac{\pi G r^4}{2L} \tag{20}$$

Jest to równanie analogiczne do równania (9a), czyli okres drgań możemy wyrazić wzorem (12):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2LI}{\pi G r^4}} \tag{21}$$

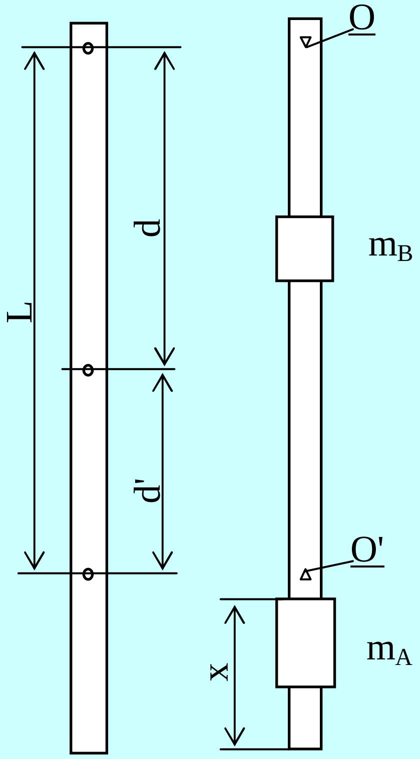
Przekształcając to wyrażenie znajdujemy wartość modułu sprężystości:

$$G = \frac{8\pi LI}{r^4 T^2} \tag{22}$$

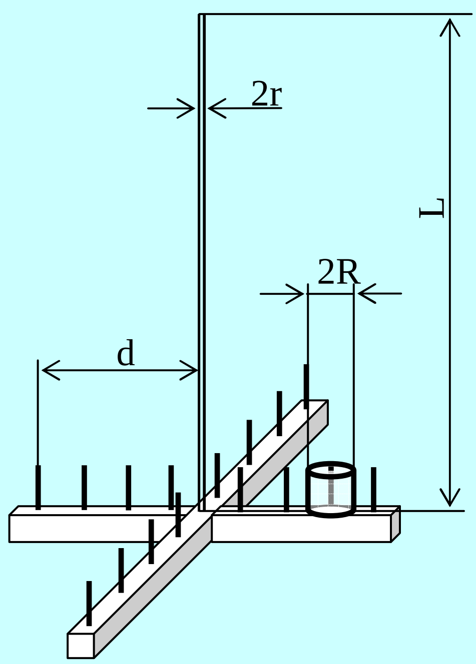
Przypominamy, że L - jest tu długością pręta, r - jego promieniem, I - momentem bezwładności masy wprawionej w drgania względem osi przechodzącej przez oś pręta, T - okresem drgań.

2. Opis ćwiczenia

<u>2.1. Wyznaczanie przyśpieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego.</u>



Rys.4 Wahadło rewersyjne.



Rys.5. Wahadło torsyjne.

Wahadło rewersyjne składa się z metalowego pręta, na którym umieszczone są dwa przesuwalne ciężarki $m_A \; i \; m_B$ (rys.4), oraz dwa ostrza (osie obrotu) 0 i 0', których położenie również możemy zmieniać. Przez zmianę położenia ciężarków doprowadzić możemy do tego, że okresy wahań na osi 0 i 0' będą sobie równe. Wtedy odległość między tymi osiami stanie się długością zredukowaną L rozważanego wahadła fizycznego. Znajomość zaś długości zredukowanej i okresu drgań T pozwoli nam obliczyć wartość przyśpieszenia ziemskiego g, ze wzoru (16a):

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \tag{23}$$

2.2. Wyznaczanie modułu sprężystości za pomocą wahadła torsyjnego.

Moduł sprężystości wyznaczyć możemy doświadczalnie posługując się prostym przyrządem pokazanym na rys.5.

Badany pręt o długości L obciążony jest wibratorem w postaci krzyża, na którym możemy umieszczać ciężarki. Skręcenie wibratora o niewielki kąt powoduje powstanie w pręcie sił sprężystości, które wywołują drgania harmoniczne całego układu.

Wszystkie wielkości występujące we wzorze (22), poza momentem bezwładności I, możemy łatwo zmierzyć. Wyznaczenie momentu bezwładności takiej bryły, jaką jest wibrator, byłoby rzeczą bardzo skomplikowaną. Trudność tę omijamy w następujący sposób: W pierwszej fazie doświadczenia wprawiamy w ruch wibrator nie obciążony lub umieszczamy na nim ciężarki dające „obciążenie wstępne" (które należy traktować jako wchodzące w skład masy nieobciążonego wibratora) i znajdujemy okres drgań takiego układu:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \, . \tag{24}$$

Następnie umieszczamy na wibratorze dodatkowe ciężarki, których moment bezwładności względem osi przechodzącej przez ich środek masy możemy łatwo wyznaczyć i mierzymy nowy okres drgań T_2:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_z}{D}} \tag{25}$$

I_z - jest tu momentem bezwładności dodatkowych ciężarków.

Podnosząc dwa ostatnie równania do kwadratu, odejmując je od siebie i uwzględniając wzór (22), otrzymujemy:

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{I_z}{D} = \frac{8\pi I_z L}{G r^4} \tag{26}$$

skąd:

$$G = \frac{8\pi L I_z}{r^4 (T_2^2 - T_1^2)} \, . \tag{27}$$

W szczególnym przypadku, gdy to dodatkowe obciążenie stanowią jednorodne walce o momencie bezwładności względem osi przechodzącej przez ich środek ciężkości i równoległej do osi pręta wynoszącym $I_0 = \frac{1}{2} m R^2$ (m - jest masą walca, R - jego promieniem), i gdy walce te umieścimy w odległości *d* od osi pręta, to zgodnie z twierdzeniem Steinera wielkość $I_z = n(I_0 + md^2) = n(\frac{1}{2} m R^2 + md^2)$, gdzie *d* - jest średnią odległością środka walca obciążającego od osi wibratora, a *n* – ilością obciążników. Moduł sztywności G wyznaczamy ze wzoru (27) po podstawieniu do niego wyrażenia na I_z:

$$G = \frac{8n\pi L\left(\frac{1}{2}\overline{R}^2 + \overline{d}^2\right)\overline{m}}{\overline{r}^4 (T_2^2 - T_1^2)} . \quad \textbf{(28)}$$

3. Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników

3.1. Wahadło rewersyjne

1. Ciężarek m_A umieścić w położeniu najbliższym osi 0'. (Nie wolno zmieniać położenia ciężarka B.)
2. Uruchomić wahadło i zmierzyć czas dwudziestu wahnięć wokół osi 0.
3. Wyznaczyć okres drgań T_0. Odwrócić wahadło, zmierzyć czas 20 wahnięć wokół osi 0' i wyznaczyć okres drgań T_0'.
4. Przesunąć ciężarek m_A o 2 cm, ponownie znaleźć okresy wahań T_0 i T_0' wokół osi 0 i 0'. Mierząc za każdym razem odległość ruchomego ciężarka A od osi 0' postępować w ten sposób do momentu, gdy ciężarek m_A znajdzie się na końcu wahadła.
5. Po zmierzeniu okresów drgań wahadła zawieszanego na osi 0'-T_0' i osi 0-T_0 w funkcji położenia ruchomego ciężarka - *x* sporządzić wykres $T_0 = T_0(x)$ i $T_0' = T_0'(x)$ (zależność okresów drgań wahadła od odległości ruchomego ciężarka od wybranej osi obrotu).
6. Znaleźć na nim punkt przecięcia krzywych $T_0(x)$ i $T_0'(x)$ – punkt (x_0, T).
7. Jeśli okaże się że krzywe na wykresie nie przecięły się, należy poprosić asystenta o zmianę położenia ciężarka m_B i doświadczenie należy powtórzyć od początku.
8. W przypadku gdy krzywe przecinają się, sprawdzić, ustawiając ciężarek m_A w punkcie x_0, czy istotnie wtedy $T_0 = T_0'$. Gdyby okazało się, że dla tego ustawienia okresy nie są dokładnie sobie równe, przesunąć m_A o około 1cm w jednym lub drugim kierunku. Powtórzyć pomiary. Położenie ciężarka zmieniać do momentu, gdy okresy w granicach niepewności będą sobie równe.
9. Zmierzyć odległość *L* miedzy osiami (długość zredukowaną).
10. Znalezioną wartość *T* i *L* podstawić do wzoru (23), z którego obliczyć wartość przyśpieszenia ziemskiego.
11. Obliczyć niepewność złożoną u_c mierzonej wielkości. Obliczyć niepewność rozszerzoną U_c.
12. Wyznaczoną wielkość porównać z wartością tablicową i ocenić poprawność zastosowanej metody pomiarowej.

Tabela wyników pomiarów

L =	*n* =											
x												
t_0												
$T_0 = \frac{t_0}{n}$												
t_0'												
$T_0' = \frac{t_0'}{n}$												

3.2. Wahadło torsyjne

1. Za pomocą śruby mikrometrycznej zmierzyć kilka razy, w różnych miejscach, średnicę badanego pręta (2*r*).
2. Zmierzyć długość badanego pręta (*L*).
3. Wprawić w ruch wibrator nie obciążony lub obciążony „obciążeniem wstępnym”. Zmierzyć czas t_1 dwudziestu okresów drgań.

4. Zmierzyć średnice (2R) *n* dodatkowych ciężarków.
5. Zważyć *n* dodatkowych ciężarków.
6. Zmierzyć odległość między sztyftami na których umieszczone są te ciężarki (2*d*), (rys.5).
7. Po umieszczeniu ciężarków na sztyftach ponownie wprawić wibrator w drgania. Zmierzyć czas t_2 dwudziestu okresów drgań.
8. Po wykonaniu odpowiednich pomiarów, wyznaczyć wartość T_1 i T_2 i obliczyć wartości średnie $\bar{r},\bar{R},\bar{d},\bar{m}$.
9. Wielkość *G* wyznaczyć ze wzoru (28).
10. Wyznaczyć niepewności standardowe wszystkich wielkości mierzonych bezpośrednio. Dla każdej z niepewności określić, czy niepewność była wyznaczana metodą typu A, czy typu B.
11. Wyznaczyć niepewność złożoną i niepewność rozszerzoną wielkości *G*. Poprawnie zapisać wyniki.
12. Porównać wyznaczoną wartość *G* z wartością tablicową (czy znaleziona wielkość mieści się w przedziale niepewności).

4. Pytania kontrolne

1. Jakie warunki muszą być spełnione, aby ciało mogło poruszać się ruchem harmonicznym?
2. Narysować zależność przyśpieszenia i prędkości od czasu w ruchu harmonicznym. Czy zmieniają się one w fazie z wychyleniem?
3. Zastanowić się, w jakim celu zmieniamy położenie ciężarków w wahadle rewersyjnym (przy ustalonej odległości między osiami).
4. Czy w stanie nieważkości można obserwować drgania wahadła fizycznego? a wahadła torsyjnego?

5. Literatura

1. J. Orear – Fizyka.
2. H. Szydłowski – Pracownia fizyczna.

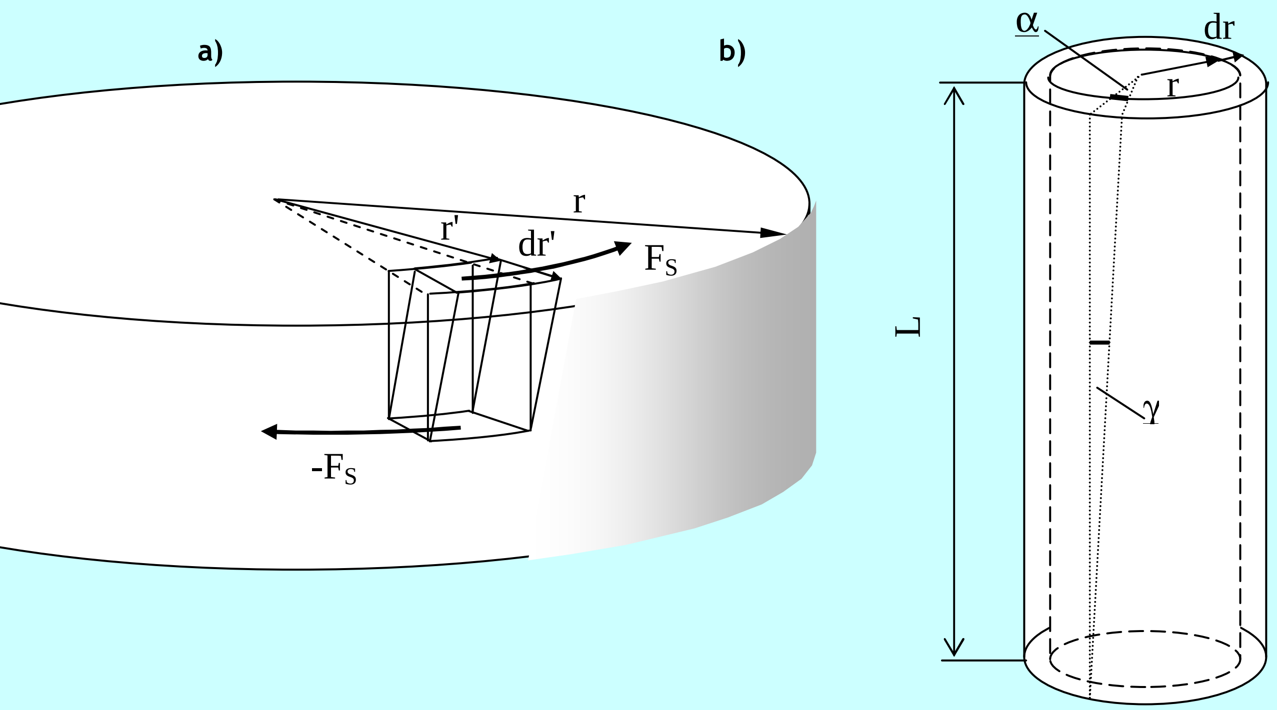
Dodatek – Zależność między modułem sztywności a momentem siły

Wyprowadzimy zależność matematyczną między modułem sztywności G, a momentem siły działającej na skręcony pręt. Rozważmy cylindryczny element pręta o promieniu wewnętrznym *r'*, grubości *dr'* i długości *L*, równej długości całego pręta (*L*>>*r'*) (rys.4). Naprężenie styczne w tym przypadku wynosi:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \frac{s}{L}$$

gdzie s - jest elementem łuku. Ale $\frac{s}{r'} = \alpha$, a więc:

$$\tau = G \frac{r'}{L} \alpha$$



Rys.6 a) Odkształcanie elementów skręcanego pręta.
b) Odkształcanie cylindrycznej warstwy skręcanego pręta.

Powierzchnia *ds* przekroju pierścienia ograniczonego obwodami o promieniach *r'* i *r'*+ *dr'* wynosi $2\pi r' dr'$. Wartość siły stycznej działającej na taki pierścień można określić korzystając ze wzoru (17) i poprzedniego:

$$dF_s = \tau dS = G \frac{r'}{L} \alpha \cdot 2\pi r' dr'$$

moment siły zaś równy jest:

$$dM = dF_s r' = \frac{2\pi}{L} G \alpha r'^3 \, dr'$$

Całkując to wyrażenie w granicach od 0 do *r*, otrzymamy wartość momentu siły działającej na całą powierzchnię przekroju poprzecznego pręta:

$$M = \int_0^r \frac{2\pi}{L} G \alpha r'^3 \, dr' = \frac{\pi G r^4}{2L} \alpha$$