

ELEKTROMAGNETYCZNE DRGANIA WYMUSZONE W OBWODZIE RLC

1. Podstawy fizyczne

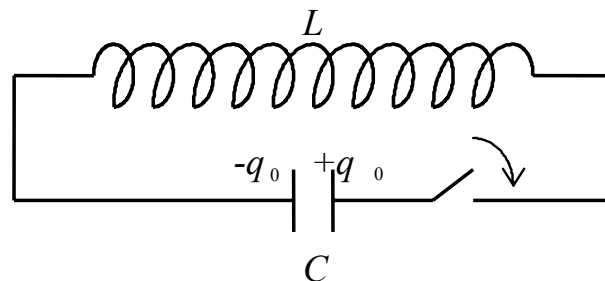
Drgania są zjawiskiem powszechnie występującym w przyrodzie i w technice. W zjawisku tym stan fizyczny układu drgającego opisywany jest przez wielkości fizyczne zależne okresowo od czasu. Najważniejszym, a także najprostszym rodzajem drgań są tzw. drgania harmoniczne, w których zależność od czasu można opisać funkcjami sinus lub/i cosinus. Duże znaczenie tego rodzaju drgań polega na tym, że dowolne drganie można przedstawić w postaci kombinacji liniowej różnych drgań harmonicznych (tzw. analiza Fouriera).

Swobodne drgania harmoniczne wykonuje układ fizyczny, do którego została jednorazowo dostarczona pewna porcja energii i nie ma dalszego wpływu otoczenia na układ. Jeśli występuje niewielkie tłumienie liniowe (proporcjonalne do pochodnej po czasie podstawowego parametru opisującego stan układu, np. wychylenia z położenia równowagi w drganiach mechanicznych, lub ładunku na kondensatorze w drganiach elektromagnetycznych), to zachodzą „prawie okresowe” drgania zanikające. Drgania harmoniczne opisywane są za pomocą liniowych równań różniczkowych, czyli takich, w których występuje kombinacja liniowa (suma ze stałymi współczynnikami) funkcji i jej pochodnych po czasie.

Jeśli na układ drgający działa harmoniczne (sinusoidalne) wymuszenie, dostarczające okresowo energię, to mimo występowania tłumienia liniowego zachodzą ustalone drgania wymuszone. Takie oddziaływanie zewnętrzne nie powinno zmieniać własności układu drgającego, a także amplituda, częstość i faza tego oddziaływania nie powinny zależeć od stanu układu drgającego. Założenia te mają oczywiście charakter modelowy, gdyż w układach rzeczywistych występują pewne sprzężenia między układem pobudzonym do drgań i źródłem wymuszania. Aby przewidywania modelu teoretycznego zgadzały się z doświadczeniem ważne jest aby te odstępstwa były niewielkie, a więc do pominięcia.

1.1. Elektromagnetyczne drgania harmoniczne swobodne.

Modelowym układem fizycznym, w którym zachodzić mogą elektromagnetyczne drgania harmoniczne swobodne jest zamknięty obwód elektryczny o oporności równej zero, zawierający cewkę o indukcyjności L i kondensator o pojemności C .



Rys.1. Obwód LC - elektromagnetyczny oscylator harmoniczny swobodny.

W obwodzie przedstawionym na rys.1 kondensator został naładowany ładunkiem q_0 . Gdy w chwili $t = 0$ zamkniemy obwód, to kondensator zacznie się rozładowywać i zmieniający się prąd rozładowania spowoduje powstanie w cewce siły elektromotorycznej samoindukcji. Stan fizyczny obwodu można opisać za pomocą II prawa Kirchhoffa:

$$U_L + U_C = 0 \quad , \quad \text{gdzie: } U_L = L \frac{di}{dt} \quad , \quad U_C = \frac{q}{C} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt} \quad . \quad (1)$$

Po podstawieniach i przekształceniach otrzymujemy **równanie elektromagnetycznego oscylatora harmonicznego swobodnego**:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} \cdot q \quad . \quad (2)$$

Rozwiązaniem tego równania, spełniającym warunki początkowe: $q(0) = q_0$, $i(0) = 0$ jest funkcja:

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t \quad , \quad (3)$$

$$\text{gdzie: } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ - } \text{częstość drgań własnych obwodu LC} \quad , \quad (4)$$

$\omega_0 \cdot t$ - faza drgań,

q_0 - amplituda drgań.

Mając funkcję $q(t)$ można obliczyć napięcie na kondensatorze $U_C(t)$, natężenie prądu $i(t)$ oraz napięcie na cewce $U_L(t)$:

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} \cos \omega_0 t = U_{C0} \cos \omega_0 t \quad , \quad U_{C0} = \frac{q_0}{C}; \quad (5)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = i_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2), \quad i_0 = q_0 \omega_0; \quad (6)$$

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt} = -L q_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t = U_{L0} \cos(\omega_0 t + \pi) \quad , \quad U_{L0} = L q_0 \omega_0^2 = \frac{q_0}{C} \quad (7)$$

Warto zauważyć, że napięcia na kondensatorze i cewce mają równe amplitudy i przeciwne fazy (przesunięcie fazowe wynosi $-\pi$), zaś natężenie prądu jest przesunięte w fazie o $-\pi/2$.

Z powyższej analizy wynika, że po dostarczeniu do obwodu LC porcji energii (naładowanie kondensatora) i braku dalszej ingerencji zewnętrznej, zachodzą w nim drgania harmoniczne swobodne - wielkości opisujące stan układu są funkcjami harmonicznymi. Porównanie z mechanicznym oscylatorem harmonicznym swobodnym (np. klocek o masie m zaczepiony do sprężyny o współczynniku sprężystości k) pokazuje, że ładunek na kondensatorze jest wielkością analogiczną do wychylenia z położenia równowagi a natężenie prądu do prędkości. Pełne zestawienie analogii między drganiami elektromagnetycznymi i drganiami mechanicznymi przedstawiono w tabeli nr 1.

Okres i częstotliwość drgań swobodnych (inaczej drgań własnych) obwodu LC są równe:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC} \quad . \quad \nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad . \quad (8)$$

Przejdźmy teraz do rozważań energetycznych. Iloczyn napięcia i natężenia prądu jest równy mocy, a zatem możemy obliczyć moc P_E i energię W_E pola elektrycznego w kondensatorze:

$$P_E = \frac{dW_E}{dt} = U_C \cdot i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow W_E = \int \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C} \cdot q^2 = \frac{1}{2C} \cdot q_0^2 \cos^2 \omega_0 t \quad (9)$$

oraz moc P_B i energię W_B pola magnetycznego w cewce:

$$P_B = \frac{dW_B}{dt} = U_L \cdot i = L \frac{di}{dt} \cdot i \Rightarrow W_B = \int L i di = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2C} \cdot q_0^2 \sin^2 \omega_0 t. \quad (10)$$

Jak widać, energie pól w kondensatorze i w cewce mają takie same amplitudy, ale są przesunięte w fazie o $\pi/2$. Całkowita energia układu drgającego będąca sumą energii pola elektrycznego w kondensatorze i pola magnetycznego w cewce

$$W = W_E + W_B = \frac{1}{2C} \cdot q_0^2 = const \quad (11)$$

jest stała i równa energii dostarczonej do obwodu.

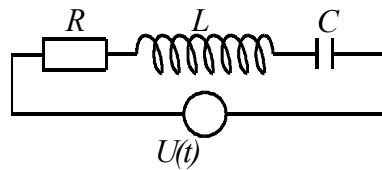
Z powyższych rozważań wynika, że elektromagnetyczne drgania swobodne w obwodzie LC można traktować jak okresowe przemiany energii pola elektrycznego w kondensatorze w energię pola magnetycznego w cewce i na odwrót. Okres tych przemian jest równy połowie okresu drgań własnych, czyli okresu zmienności napięć na kondensatorze i cewce oraz natężenia prądu. W rzeczywistych obwodach elektrycznych występuje zawsze niezerowy opór elektryczny, a więc wydziela się energia cieplna. W takim przypadku energia układu drgającego maleje i po pewnym czasie drgania zanikają.

Tabela 1. Swobodne drgania harmoniczne

DRGANIA MECHANICZNE	DRGANIA ELEKTROMAGNETYCZNE
siła harmoniczna $F_h = -kx$	napięcie na kondensatorze $U_C = \frac{1}{C} q$
$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$	$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q$
$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
masa ciała m	indukcyjność cewki L
współczynnik sprężystości sprężyny k	odwrotność pojemności kondensatora $1/C$
położenie względem stanu równowagi x	ładunek zgromadzony w kondensatorze q
prędkość liniowa $v = \frac{dx}{dt}$	natężenie prądu $i = \frac{dq}{dt}$
przyspieszenie liniowe $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$	$\frac{d^2 q}{dt^2}$
energia potencjalna $W_P = \frac{1}{2} kx^2$	energia pola elektrycznego w kondensatorze $W_E = \frac{Q^2}{2C}$
energia kinetyczna $W_K = \frac{1}{2} mv^2$	energia pola magnetycznego w cewce $W_B = \frac{1}{2} Li^2$

1.2. Elektromagnetyczne drgania wymuszone

Elektromagnetyczne drgania wymuszone można zaobserwować w obwodzie RLC (zawierającym cewkę o indukcyjności L , kondensator o pojemności C oraz rezystor o rezystancji R), do którego dołączone zostało źródło napięcia sinusoidalnego (rys. 2).



$$U(t) = U_0 \sin \omega t$$

Rys.2. Obwód RLC ze źródłem napięcia wymuszającym drgania.

Stan fizyczny tego układu opisuje w dowolnej chwili II prawo Kirchhoffa:

$$U_L + U_R + U_C = U_0 \sin \omega t, \text{ czyli:} \quad (12)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = U_0 \sin \omega t. \quad (13)$$

Po podzieleniu równania (13) przez L i podstawieniu

$$\frac{dq}{dt} = i, \quad \frac{R}{2L} = \beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (14)$$

gdzie: β - współczynnik tłumienia, ω_0 - częstość drgań swobodnych, otrzymujemy **równanie elektromagnetycznych drgań wymuszonych**:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \sin \omega t. \quad (15)$$

W równaniu tym bezpośrednio parametry układu fizycznego, jakimi są w przypadku obwodu RLC: indukcyjność L , pojemność C i rezystancja R zostały zastąpione przez uniwersalne parametry występujące w opisie drgań harmonicznym dowolnego układu fizycznego (np. oscylator harmoniczny mechaniczny), a mianowicie przez częstość drgań własnych ω_0 i współczynnik tłumienia β .

Ponieważ napięcie wymuszające jest sinusoidalną funkcją czasu, to rozwiązania tego równania poszukujemy w postaci funkcji:

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (16)$$

a zatem przewidujemy, że ładunek na kondensatorze będzie się zmieniać sinusoidalnie z częstością taką jak częstość napięcia wymuszającego oraz, że będzie przesunięty w fazie o ϕ względem tego napięcia. Po podstawieniu przewidywanej funkcji $q(t)$ do równania (15) i zażądaniu, aby równanie to stało się tożsamością (funkcja $q(t)$ musi spełniać to równanie w każdej chwili czasu) otrzymamy wzory określające **amplitudę ładunku q_0** i **przesunięcie fazowe ϕ** :

$$q_0 = \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \phi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (17)$$

Przy ustalonych parametrach układu R , L , C , a więc również ω_0 i β amplituda ładunku oraz przesunięcie fazowe są funkcjami częstości ω napięcia wymuszającego. Po przeprowadzeniu badania funkcji $q_0(\omega)$ można stwierdzić, że amplituda ładunku na kondensatorze osiąga wartość maksymalną dla częstości wymuszania ω_r określonej wzorem :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad \text{gdzie } \beta < \beta_g = \omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (18)$$

Zjawisko wymuszania drgań z taką częstością przy której amplituda drgań osiąga wartość maksymalną nazywamy rezonansem. Rezonans w obwodzie RLC zachodzi przy częstości wymuszania ω_r , zwanej **częstością rezonansową**, gdy współczynnik tłumienia β jest mniejszy od wartości granicznej β_g . Gdy tłumienie jest większe ($\beta \geq \omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$), układu RLC nie udaje się wprowadzić w stan rezonansu.

Amplitudę drgań i przesunięcie fazowe w stanie rezonansu można wyrazić wzorami:

$$(q_0)_{\max} = \frac{\frac{U_0}{L}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad \phi_r = \arctg \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}. \quad (19)$$

Szczególny przypadek rezonansu występuje w przypadku gdy współczynnik tłumienia $\beta=0$. Dla takiego układu rezonans zachodzi przy częstości wymuszania równej częstości drgań własnych $\omega_r=\omega_0$ i objawia się wzrostem amplitudy do nieskończoności oraz przesunięciem fazowym $\phi_r=\pi/2$. W takiej sytuacji dochodzi przeważnie do zniszczenia układu drgającego zanim amplituda drgań osiągnie wartość nieskończoną.

Graniczne wartości amplitudy drgań q_0 i przesunięcia fazowego ϕ dla częstości wymuszania dążącej do zera wynoszą:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} q_0 = U_0 C, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \phi = 0. \quad (20)$$

Dla częstości znacznie przekraczających częstość własną, wartości graniczne amplitudy drgań i przesunięcia fazowego wynoszą:

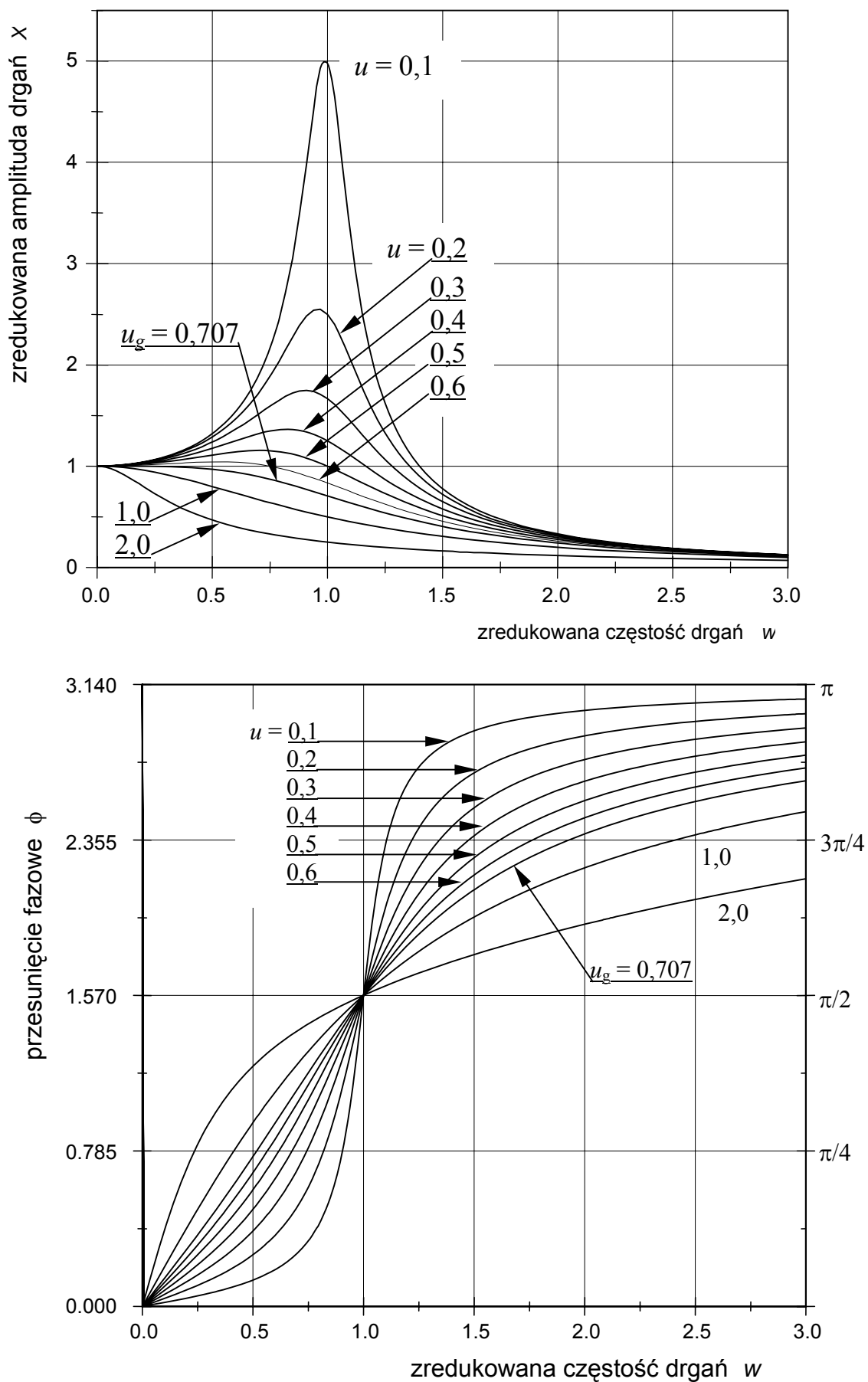
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} q_0 = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \phi = 0, \quad \text{a więc} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi = \pi. \quad (21)$$

Warto zaznaczyć, że **niezależnie od wartości współczynnika tłumienia, przesunięcie fazowe ϕ osiąga wartość $\pi/2$ przy częstości wymuszania ω równej częstości drgań własnych układu ω_0 .**

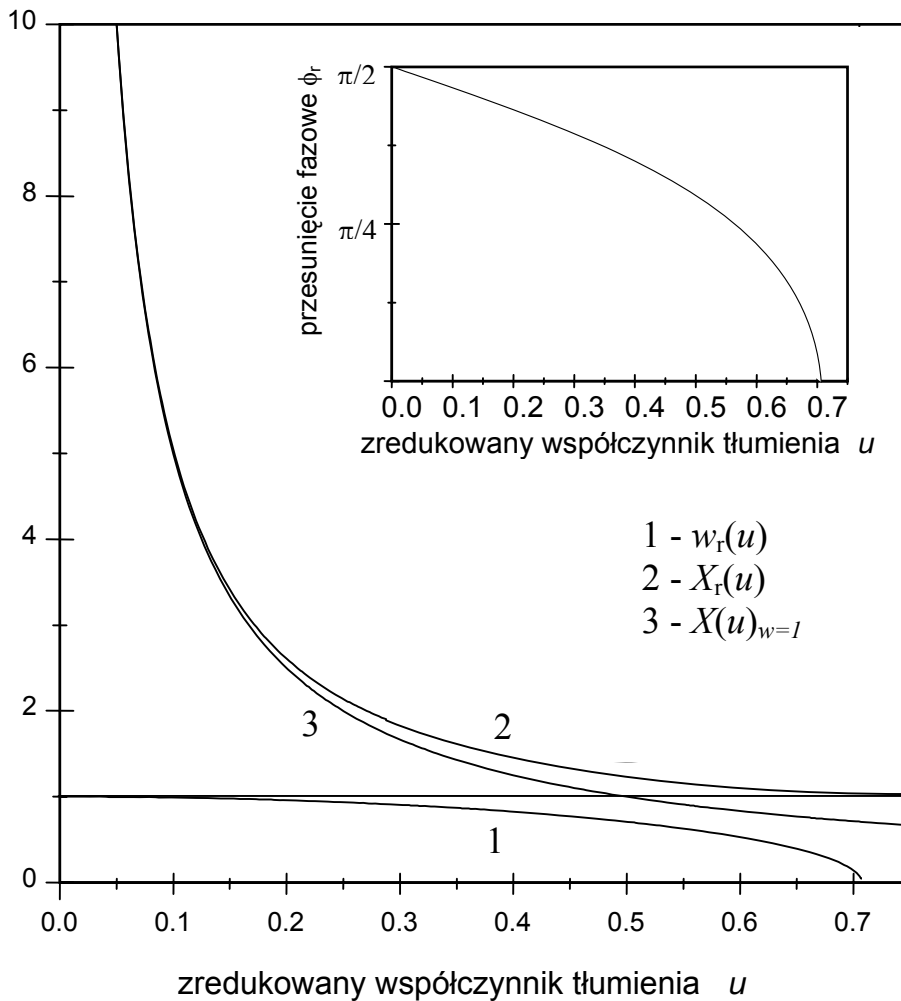
Wzory opisujące drgania wymuszone i rezonans można zapisać w uniwersalnej postaci bezwymiarowej, słusznej zarówno dla drgań elektromagnetycznych, jak i dla drgań mechanicznych. W tym celu wprowadza się tzw. **parametry zredukowane**:

$$\text{zredukowany współczynnik tłumienia:} \quad u = \frac{\beta}{\omega_0}, \quad (22)$$

$$\text{zredukowana częstość drgań:} \quad w = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (23)$$



Rys. 3. Zależność zredukowanej amplitudy drgań X oraz przesunięcia fazowego ϕ od zredukowanej częstości drgań w dla kilku wartości zredukowanego współczynnika tłumienia u .



Rys. 4. Wpływ zredukowanego współczynnika tłumienia u na: zredukowaną częstotliwość rezonansową w_r , amplitudę drgań X_r w stanie rezonansu, amplitudę X przy częstotliwości zredukowanej $w = 1$ oraz przesunięcie fazowe ϕ_r w stanie rezonansu.

zredukowana amplituda drgań wymuszonych $X = \frac{q_0(\omega)}{q_0(\omega \rightarrow 0)} = \frac{q_0(\omega)}{U_0 C}$. (24)

Po zastosowaniu powyższych podstawień wzory określające: amplitudę drgań i przesunięcie fazowe dla dowolnej częstotliwości wymuszania (wzór 17), częstotliwość rezonansową (wzór 18) oraz amplitudę drgań i przesunięcie fazowe w stanie rezonansu (wzór 19) przyjmą postać:

$$X = \frac{1}{\sqrt{(1-w^2)^2 + 4u^2 w^2}}, \quad \phi = \arctg \frac{2uw}{1-w^2}, \quad (25)$$

$$w_r = \sqrt{1-2u^2}, \quad (26)$$

$$X_r = X(\omega_r) = \frac{1}{2u\sqrt{1-2u^2}}, \quad \phi_r = \phi(\omega_r) = \arctg \frac{\sqrt{1-2u^2}}{u}. \quad (27)$$

Na rys.3 przedstawiono wykresy zależności zredukowanej amplitudy drgań X i przesunięcia fazowego ϕ od zredukowanej częstości drgań w dla kilku wartości zredukowanego współczynnika tłumienia u . W miarę wzrostu współczynnika tłumienia rezonans pojawia się dla częstości coraz mniejszych i wartość amplitudy drgań w stanie rezonansu jest coraz mniejsza. Po przekroczeniu granicznej wartości współczynnika tłumienia rezonans nie pojawia się (krzywa $X(w)$ nie posiada maksimum).

Wykresy przedstawione na rys.4 pokazują wpływ zredukowanego współczynnika tłumienia u na zredukowaną częstość rezonansową w_r , zredukowaną amplitudę drgań X_r i przesunięcie fazowe ϕ_r w stanie rezonansu oraz na zredukowaną amplitudę X dla $w=1$. Warto zauważyć, że dla małych wartości współczynnika tłumienia amplituda drgań wymuszonych (amplituda ładunku) w stanie rezonansu X_r jest funkcją szybkozmienną, zaś częstość rezonansowa funkcją wolnozmienną (jej wartość jest bliska częstości własnej układu). Gdy współczynnik tłumienia zbliża się do wartości granicznej, to - odwrotnie - amplituda drgań jest niemal stała (bliska wartości granicznej dla częstości wymuszania bliskiej zero, zaś częstość rezonansowa w_r jest funkcją szybkozmienną. Wartość zredukowanej amplitudy X dla $w = 1$ jest mniejsza od X_r .

Znając funkcję $q(t)$ można wyznaczyć pozostałe funkcje opisujące stan fizyczny układu drgającego: napięcie na kondensatorze, natężenie prądu, napięcie na oporniku oraz napięcie na cewce.

1.3. Napięcie na kondensatorze

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \cdot \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \sin(\omega_0 t - \phi) = U_{C0} \sin(\omega_0 t - \phi), \quad (28)$$

$$U_{C0} = U \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \phi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (29)$$

Zależność amplitudy napięcia na kondensatorze od częstości wymuszania jest oczywiście taka sama jak amplitudy ładunku. Napięcie na kondensatorze jest zgodne w fazie z ładunkiem, a więc ϕ określa również jego przesunięcie fazowe względem napięcia wymuszającego. W stanie rezonansu, czyli dla częstości wymuszania równej ω_r , amplituda napięcia na kondensatorze osiąga wartość maksymalną:

$$(U_{C0})_{\max} = \frac{(q_0)_{\max}}{C} = U_0 \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad \text{dla} \quad \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (30)$$

a przesunięcie fazowe względem napięcia wymuszającego wynosi:

$$\phi_r = \arctg \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} = \arctg \frac{\omega_r}{\beta}. \quad (31)$$

Wartości graniczne: gdy częstość wymuszania dąży do zera, to amplituda napięcia na kondensatorze dąży do wartości U_0 , zaś dla częstości znacznie większych od częstości własnej ω_0 dąży do zera. Przesunięcie fazowe zmienia się od zera dla bardzo małej częstości wymuszania do π dla częstości bardzo dużej.

Pozostałe funkcje opisujące stan fizyczny układu drgającego: natężenie prądu, napięcie na rezystorze oraz napięcie na cewce zostały przedstawione w Dodatku nr 1.

1.3. Współczynnik dobroci

W celu ilościowego wyrażenia rezonansowych własności układu drgającego wprowadzono współczynnik Q zwany dobrocią. **Dobroć układu drgającego** określa ile razy amplituda q_0 ustalonych drgań wymuszonych w stanie rezonansu jest większa od amplitudy z dala od rezonansu, czyli w obszarze częstości tak małych, że amplitudę drgań wymuszonych można traktować jako niezależną od częstości.

$$Q = \frac{q_0(\omega_r)}{q_0(\omega \rightarrow 0)}. \quad (32)$$

Podstawiając do tego wzoru odpowiednie wartości amplitudy ładunku (wzory (19), (20)) i pamiętając, że $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ otrzymujemy:

$$Q = \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (33)$$

W przypadku dużego tłumienia, tzn. gdy współczynnik tłumienia zbliża się do wartości granicznej $\beta_g = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \omega_0$ dobroć maleje do jedności. Dla współczynników tłumienia znacznie mniejszych od wartości granicznej otrzymujemy wzór przybliżony:

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (34)$$

Według innej, często stosowanej definicji dobroć układu drgającego jest proporcjonalna do stosunku średniej energii zgromadzonej w stanie rezonansu $\langle W_z \rangle_r$ do energii straconej w czasie jednego okresu drgań $\langle W_s \rangle_r$:

$$Q = 2\pi \frac{\langle W_z \rangle_r}{\langle W_s \rangle_r}. \quad (35)$$

Po obliczeniu energii $\langle W_z \rangle_r$ i $\langle W_s \rangle_r$ i podstawieniu do wzoru (35) otrzymamy wzór (33).

Z rozważań energetycznych wynika jeszcze jeden sposób określania dobroci układu drgającego. W przypadku małego tłumienia dobroć układu drgającego jest równa odwrotności **względnej szerokości rezonansu** $\frac{\Delta\nu}{\nu_r}$:

$$Q = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_r}\right)}. \quad (36)$$

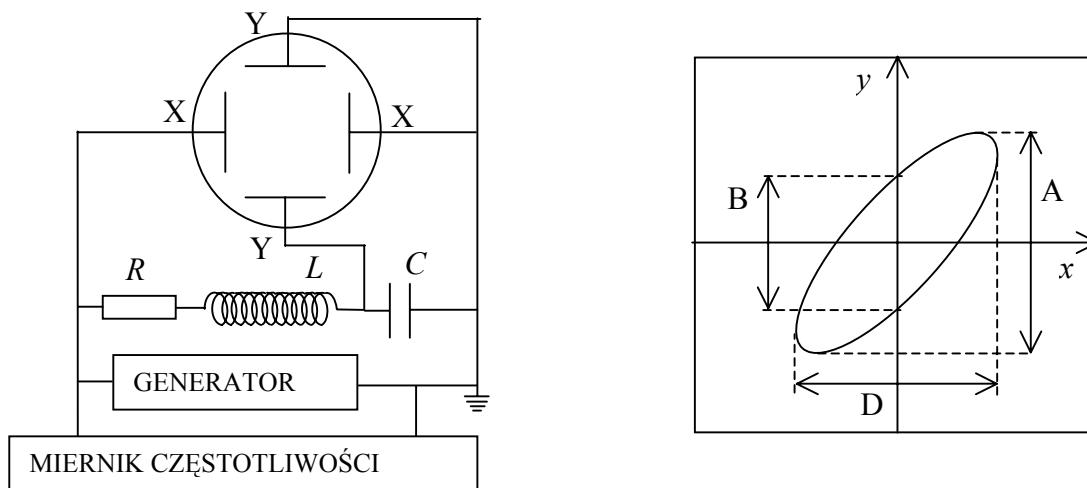
Szerokość rezonansu $\Delta\nu$ określamy na podstawie krzywej zależności amplitudy drgań od częstotliwości (różnica częstotliwości dla których amplituda jest równa $\frac{\sqrt{2}}{2}$ amplitudy w stanie

rezonansu) lub na podstawie krzywej zależności przesunięcia fazowego od częstotliwości (różnica częstotliwości dla których $\phi = \frac{\pi}{4}$ i $\phi = \frac{3\pi}{4}$).

2. Metoda pomiarowa i układ pomiarowy

Celem ćwiczenia jest badanie drgań elektromagnetycznych w obwodzie RLC wymuszonych przez sinusoidalne zmienne napięcie generatora. Wygodną wielkością opisującą to zjawisko, zarówno ze względów pomiarowych jak też ze względu na opis teoretyczny, jest napięcie na kondensatorze. Wykonywane pomiary powinny prowadzić do znalezienia zależności amplitudy oraz przesunięcia fazowego napięcia na kondensatorze od częstotliwości napięcia wymuszającego.

W układzie pomiarowym przedstawionym na rys.5 znajduje się generator, miernik częstotliwości, oscyloskop i płytki pomiarowa umożliwiające połączenie elementów R,L,i C obwodu oraz dołączenie generatora i oscyloskopu. Rezystory, cewki i kondensatory są zamknięte w przezroczystych klockach, które można wkładać w gniazdka płytki pomiarowej.



Rys.5. Schemat układu pomiarowego oraz obraz na ekranie oscyloskopu.

Metoda pomiarowa polega na wykorzystaniu oscyloskopu i miernika częstotliwości. Generator dostarcza do obwodu RLC napięcie sinusoidalne o ustalonej częstotliwości. Dokładny odczyt częstotliwości umożliwia miernik częstotliwości podłączony równolegle do wyjścia z generatora. Napięcie z generatora jest podawane na płytki odchylenia poziomego (wejście X) a napięcie z kondensatora na płytki odchylenia pionowego (wejście Y).

$$U_X = U_G(t) = U_{G0} \sin \omega t \quad (37)$$

$$U_Y = U_C(t) = U_{C0} \sin(\omega t - \phi) \quad (38)$$

W wyniku składania dwóch drgań harmonicznnych o jednakowych częstotliwościach (przykładane napięcia są sinusoidalnymi funkcjami czasu) na ekranie oscyloskopu powstaje elipsa (patrz Dodatek 2), której kształt zależy od amplitud oraz od przesunięcia fazowego (rys.5). W punktach, w których elipsa przecina oś OY chwilowa wartość napięcia z generatora jest równa zero:

$$U_G(t) = U_{G0} \sin \omega t = 0, \text{ zatem } \sin \omega t = 0 \text{ i } \cos \omega t = \pm 1. \quad (39)$$

Stąd wynikają chwilowe wartości napięcia na kondensatorze:

$$U_C(t) = U_{C0} \sin(\omega t - \phi) = U_{C0}(\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi) = \pm U_{C0} \sin \phi. \quad (40)$$

A zatem:

$$DK_x = 2U_{G0}, \quad AK_y = 2U_{C0}, \quad BK_y = 2U_{C0} \sin \phi, \quad (41)$$

gdzie K_x i K_y - czułości wejścia X i wejścia Y oscyloskopu ($[K] = \text{V/cm}$).

Mierząc na ekranie oscyloskopu odcinki D, A i B możemy wyznaczyć odpowiednio amplitudę napięcia z generatora, amplitudę napięcia na kondensatorze i przesunięcie fazowe między tymi napięciami:

$$U_{G0} = \frac{1}{2}DK_x, \quad U_{C0} = \frac{1}{2}AK_y, \quad \sin \phi = \frac{B}{A}, \quad (42)$$

dla danej wartości częstotliwości wymuszania drgań.

3. Wykonanie ćwiczenia

3.1. Wybór parametrów pierwszej serii pomiarowej

Wybieramy cewkę o indukcyjności L , kondensator o pojemności C i obliczamy teoretyczne wartości częstości własnej $(\omega_0)_t$ i częstości własnej $(\nu_0)_t$:

$$(\omega_0)_t = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (\nu_0)_t = \frac{(\omega_0)_t}{2\pi} \quad (43)$$

Ustalamy taką oporność obwodu R_1 (suma rezystancji rezystora i rezystancja omowa cewki), aby uzyskać dość silne tłumienie drgań, tzn. aby obliczona wartość teoretyczna współczynnika tłumienia była nieco mniejsza od wartości granicznej:

$$\beta_t = \frac{R_1}{2L} < \beta_g = \omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (44)$$

Obliczamy też teoretyczne wartości częstości rezonansowej i częstości rezonansowej:

$$(\omega_r)_t = \sqrt{(\omega_0)_t^2 - 2\beta_t^2}, \quad (\nu_r)_t = \frac{(\omega_r)_t}{2\pi}. \quad (45)$$

3.2. Zestawienie układu pomiarowego

Wkładamy do płytki pomiarowej klocki zawierające elementy obwodu o wybranych wartościach rezystancji, indukcyjności i pojemności. Podłączamy generator i wejścia oscyloskopu do odpowiednich gniazdek w płytce pomiarowej za pomocą kabli koncentrycznych w ten sposób, aby napięcie z generatora było podłączone do wejścia X oscyloskopu a napięcie z kondensatora do wejścia Y (patrz schemat układu pomiarowego – rys.5). Do wyjścia z generatora podłączamy równolegle miernik częstości. Przy realizowaniu połączeń należy zwrócić uwagę na takie połączenie kabli, aby końcówki tzw. masy generatora i oscyloskopu były ze sobą połączone. Ustawiamy taką wartość amplitudy sinusoidalnego napięcia wyjściowego generatora, aby przy danej czułości wejścia X oscyloskopu napięcie to mieściło się na ekranie. Ustalonej wartości amplitudy nie należy zmieniać podczas pomiarów.

3.3. Przeprowadzanie pomiarów

1. Po ustaleniu częstości napięcia z generatora (zbliżonej do obliczonej wartości częstości rezonansowej danego układu) i dobraniu odpowiednich czułości K_x i K_y wejść oscyloskopu na ekranie oscyloskopu otrzymujemy pochyloną elipsę. Zmieniając częstość napięcia z generatora zmieniamy kształt tej elipsy.

Uwaga: niektóre typy oscyloskopów nie mają cechowanej regulacji czułości wejścia X. W takim przypadku wartość K_x można wyznaczyć w następujący sposób. Ustalamy amplitudę napięcia z generatora, napięcie to podłączamy do wejścia Y oscyloskopu przy wyłączonym generatorze podstawy

czasu. Mierzmy długość l_y pionowej kreski która pojawiła się na ekranie i korzystając z relacji $l_y K_y = 2U_{G0}$ możemy wartość podwojonej amplitudy napięcia z generatora wyrazić w woltach. Następnie podłączamy napięcie z generatora do wejścia X i przy ustalonej, nieznannej wartości czułości K_x mierzymy długość l_x poziomej kreski, która pojawiła się na ekranie. Czułość K_x obliczamy ze wzoru:

$$l_x K_x = 2U_{G0} = l_y K_y \Rightarrow K_x = \frac{l_y}{l_x} K_y \quad (46)$$

Należy również obliczyć błąd ΔK_x .

2. Wyznaczenie częstotliwości własnej układu ν_0 . Ze wzoru na przesunięcie fazowe między napięciem na kondensatorze a napięciem z generatora

$$\phi = ar \operatorname{ctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = ar \operatorname{ctg} \frac{\beta\nu}{\pi(\nu_0^2 - \nu^2)} \quad (47)$$

wynika, że dla $\nu = \nu_0$ przesunięcie fazowe wynosi $\pi/2$. A zatem częstotliwość, przy której osiami symetrii elipsy będą osie OX i OY na ekranie oscyloskopu jest częstotliwością własną badanego układu drgającego. Należy wyznaczyć ją jak najdokładniej oraz oszacować jej błąd, gdyż wartość ta będzie bardzo potrzebna przy opracowaniu wyników dalszych pomiarów.

3. Oszacowanie wartości częstotliwości rezonansowej ν_r , tzn. takiej częstotliwości wymuszania, przy której długość odcinka A (rys.5), czyli podwojona amplituda napięcia na kondensatorze jest największa.

4. Wyznaczanie zależności amplitudy i przesunięcia fazowego napięcia na kondensatorze od częstotliwości napięcia wymuszającego z generatora (pierwsza seria pomiarowa). W tym celu należy wykonać pomiary odcinków A, B i D na ekranie oscyloskopu (rys.5) dla kilkunastu częstotliwości z zakresu $(0.1\nu_r - 2\nu_r)$, zagęszczając punkty pomiarowe w okolicach częstotliwości rezonansowej. Warto zauważyć, że w okolicy rezonansu amplituda napięcia z generatora zaczyna się zmieniać (maleje). Efekt ten wynika ze zwiększonego poboru mocy z generatora przez układ drgający. Należy oczywiście oszacować dokładności pomiarów: ΔA , ΔB , ΔD , oraz $\Delta \nu$. Wyniki pomiarów należy zanotować w tabeli, która dla danej serii pomiarowej powinna zawierać:

- bezpośrednie parametry układu drgającego, czyli indukcyjność L, pojemność C oraz rezystancję całkowitą R,
 - obliczone wartości teoretyczne: częstości i częstotliwości własnej układu, współczynnika tłumienia, częstości i częstotliwości rezonansowej,
 - wyznaczone doświadczalnie wartości częstotliwości własnej i rezonansowej,
 - wyniki pomiarów odcinków A, B i D dla różnych częstotliwości,
- Propozycja wzoru tabeli z wynikami obliczeń i pomiarów została przedstawiona na końcu niniejszej instrukcji.

3.4. Wybór parametrów następnych serii pomiarowych

W drugiej serii pomiarowej zachowujemy wartość indukcyjności L i pojemności C, a zatem częstotliwość własna układu nie zmienia się. Zmieniamy natomiast rezystor, wybierając najmniejszą wartość rezystancji, a więc najmniejszą wartość współczynnika tłumienia β .

Porównanie wyników pomiarów serii pierwszej i drugiej pokaże, jaki jest wpływ wartości rezystancji, a więc i współczynnika tłumienia na zjawisko drgań wymuszonych w obwodzie RLC. Wybierając oporność tak dużą (przy nie zmienionych wartościach L i C), aby współczynnik tłumienia był większy od wartości granicznej można zaobserwować, że amplituda drgań jest malejącą funkcją częstotliwości. W takim przypadku nie występuje zjawisko rezonansu.

W trzeciej serii pomiarowej zachowujemy wartość indukcyjności L a zmieniamy wartość pojemności C na mniejszą, co powoduje zmianę częstotliwości drgań własnych układu. Ustalenie oporności układu takiej jak w serii pierwszej prowadzi do takiej samej wartości współczynnika tłumienia.

Zmienia się natomiast relacja między częstością drgań własnych a współczynnikiem tłumienia. Porównanie serii pierwszej i trzeciej pokaże jaki jest wpływ tej relacji na zjawisko drgań wymuszonych w obwodzie RLC.

4. Opracowanie wyników pomiarów

Uzupełnić trzecią część tabeli wyników (str.14) obliczając dla każdej częstotliwości: amplitudę napięcia na kondensatorze U_{C0} , amplitudę napięcia z generatora U_{G0} , amplitudę zredukowaną X , przesunięcie fazowe ϕ oraz częstotliwość zredukowaną w .

Przedstawić na wykresach przetworzone wyniki pomiarów, tzn. obliczone wartości zredukowanej amplitudy X i przesunięcia fazowego ϕ w funkcji zredukowanej częstotliwości w .

Wyznaczyć szerokość rezonansu $\Delta\nu$ z wykresu amplitudy (różnica częstotliwości dla których amplituda jest równa $\sqrt{2}/2$ amplitudy w rezonansie) i z wykresu przesunięcia fazowego (różnica częstotliwości dla których $\phi = \pi/4$ i $\phi = 3\pi/4$). Obliczyć względną szerokość rezonansu $\Delta\nu/\nu_r$.

Sporządzić zestawienie wyznaczonych dla różnych serii pomiarowych (identyfikowanych przez wartości R, L i C) wartości teoretycznych i doświadczalnych: częstości i częstotliwości własnej, współczynnika tłumienia, częstości i częstotliwości rezonansowej, dobroci i względnej szerokości rezonansu. Porównać wartość dobroci układu i odwrotności względnej szerokości rezonansu. Sformułować wnioski dotyczące wpływu bezpośrednich parametrów układu drgającego na przebieg zjawiska drgań wymuszonych i zjawiska rezonansu oraz na wyznaczone parametry drgań. Ocenić zgodność przewidywań teoretycznych z wynikami doświadczalnymi i zastanowić się nad przyczynami ewentualnych rozbieżności.

5. Pytania kontrolne

1. Co to są drgania harmoniczne swobodne? Podać i omówić równania opisujące to zjawisko w obwodzie RLC oraz jego rozwiązanie.
2. Co to są drgania wymuszone? Podać i omówić równanie opisujące to zjawisko w obwodzie RLC.
3. Podać i omówić funkcję opisującą drgania wymuszone.
4. Na czym polega zjawisko rezonansu? Czy każdy układ drgający można doprowadzić do stanu rezonansu?
5. Od jakich parametrów zależy częstość rezonansowa?
6. Od jakich parametrów zależy amplituda drgań w stanie rezonansu?
7. Jaką rolę odgrywa tłumienie w zjawisku drgań wymuszonych?
8. Podać i omówić analogie między drganiami elektromagnetycznymi i drganiami mechanicznymi.
9. Porównać zależność od częstości wymuszania amplitud napięcia na kondensatorze, na oporniku i na cewce. Czy amplitudy tych napięć osiągają wartość maksymalną dla takiej samej częstości?

6. Literatura

A. Januszajtis, Fizyka dla Politechnik, tom III Fale, Warszawa 1991, rozdz. I, str.71 – 81, 86 – 89

Tabela 2. Wyniki pomiarów.

SERIA POMIAROWA NR

Bezpośrednie parametry układu: **L** = **C** = **R** =

WARTOŚCI	$\omega_0 \pm \Delta\omega_0$	$\nu_0 \pm \Delta\nu_0$	$\beta \pm \Delta\beta$	$\omega_r \pm \Delta\omega_r$	$\nu_r \pm \Delta\nu_r$	$Q \pm \Delta Q$
teoretyczne						
doświadczalne						

numer pomiaru	1	2	3
$\nu \pm \Delta\nu [kHz]$							
$K_y \pm \Delta K_y [V/cm]$							
$A \pm \Delta A [cm]$							
$B \pm \Delta B [cm]$							
$D \pm \Delta D [cm]$							

$K_x = \dots \pm \dots$

$U_{C0} = 0.5AK_y [V]$ $\Delta U_{C0} [V]$							
$U_{G0} = 0.5K [V]$ $\Delta U_{G0} [V]$							
$X = U_{C0} / U_{G0}$ ΔX							
$\sin \phi = B / A$							
$\phi \pm \Delta\phi$							
$w = \nu / \nu_0$ Δw							

Wartości teoretyczne:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\nu_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{1}{RC\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Wartości doświadczalne:

$$\text{Ze wzoru (18)} \quad \beta = 2\pi \sqrt{\frac{v_0^2 - v_r^2}{2}}$$

$$\text{Ze wzorów (18,33)} \quad Q = \frac{v_0^2}{\sqrt{v_0^4 - v_r^4}}$$

Uwaga: do wzorów tych należy podstawić wartości v_0 i v_r wyznaczone doświadczalnie.

DODATEK 1

Znając funkcję $q(t)$ (patrz wzory (16) i (17)) można wyznaczyć pozostałe funkcje opisujące stan fizyczny układu drgającego: natężenie prądu, napięcie na oporniku oraz napięcie na cewce.

Natężenie prądu

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = i_0 \sin(\omega_0 t - \phi_R), \quad (48)$$

$$i_0 = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \phi_R = \arctg \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega}. \quad (49)$$

Przedstawione wzory pokazują, że faza natężenia prądu różni się od fazy ładunku i napięcia na kondensatorze, a amplituda natężenia prądu jest inną funkcją częstości wymuszania. Badając funkcję $i_0(\omega)$ możemy stwierdzić, że osiąga ona wartość maksymalną dla częstości wymuszania równej częstości własnej układu, niezależnie od wartości współczynnika tłumienia:

$$(i_0)_{\max} = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{2\beta} = \frac{U_0}{R} \quad \text{i} \quad \phi_R = 0 \quad \text{dla} \quad \omega = \omega_0. \quad (50)$$

Napięcie na rezystorze

$$U_R(t) = R \cdot i(t) = U_{R0} \sin(\omega_0 t - \phi_R), \quad (51)$$

$$U_{R0} = R \cdot i_0 = U_0 \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \phi_R = \arctg \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega}. \quad (52)$$

Zależność amplitudy napięcia na rezystorze od częstości napięcia wymuszającego jest oczywiście taka sama jak dla amplitudy natężenia prądu. Amplituda napięcia na oporniku osiąga największą wartość

$$(U_R)_{0\max} = U_0 \quad \text{dla} \quad \omega = \omega_0, \quad (53)$$

a napięcie na rezystorze jest wtedy zgodne w fazie z napięciem wymuszającym, tzn. $\phi_R = 0$.

Napięcie na cewce

$$U_L(t) = U_{L0} \sin(\omega_0 t - \phi_L), \quad (54)$$

$$U_{L0} = U_0 \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \phi_L = \arctg\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \pi. \quad (55)$$

Badanie zależności amplitudy napięcia na cewce od częstości napięcia wymuszającego prowadzi do ustalenia, że osiąga ona wartość maksymalną:

$$(U_L)_{0\max} = U_0 \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad \text{dla} \quad \omega = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}, \quad (56)$$

a przesunięcie fazowe względem napięcia wymuszającego wynosi wtedy:

$$\phi_L = \arctg\left(-\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}\right) - \pi = \arctg\left(-\frac{\omega_r}{\beta}\right) - \pi. \quad (57)$$

Napięcie na cewce ma fazę przeciwną względem napięcia na kondensatorze, zaś amplituda osiąga wartość największą dla częstości większej od częstości rezonansowej, a nawet większej od częstości własnej. Gdy współczynnik tłumienia zmienia się od zera do wartości granicznej to częstość ta rośnie od wartości ω_0 do nieskończoności.

DODATEK 2**Składanie prostopadłych drgań harmoniczných o jednakowych częstościach**

Przyjmijmy, że punkt materialny znajdujący się w środku układu współrzędnych XOY wykonuje wzdłuż osi układu drgania harmoniczne o jednakowych częstościach, różnych amplitudach, przesunięte w fazie o ϕ . Drgania te są opisane równaniami:

$$x(t) = D \sin \omega t \quad (58)$$

$$y(t) = A \sin(\omega t - \phi). \quad (59)$$

Aby znaleźć ogólne równanie toru punktu materialnego należy z powyższych równań wyeliminować czas. Na podstawie pierwszego równania obliczamy

$$\sin \omega t = \frac{x}{D} \quad \text{i} \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{D^2}}, \quad (60)$$

a drugie równanie przekształcamy do postaci

$$y = A(\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi). \quad (61)$$

Po podstawieniu (60) do (61) otrzymamy równanie:

$$\frac{y}{A} = \frac{x}{D} \cos \phi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{D^2}} \sin \phi . \quad (62)$$

Po podniesieniu stronami do kwadratu i redukcji otrzymamy równanie :

$$\frac{x^2}{D^2} - \frac{2xy \cos \phi}{AD} + \frac{y^2}{A^2} = \sin^2 \phi , \quad (63)$$

którego wykresem jest elipsa wpisana w prostokąt o bokach $2D$ i $2A$ równoległych do osi układu. Kształt elipsy zależy od wartości przesunięcia fazowego ϕ . Rozważmy kilka przypadków dla charakterystycznych wartości ϕ .

- Dla $\phi = 0$ (fazy zgodne) otrzymujemy:

$$\frac{x^2}{D^2} - \frac{2xy}{AD} + \frac{y^2}{A^2} = 0 \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{x}{D} - \frac{y}{A} \right)^2 = 0 , \quad (64)$$

skąd wynika, że punkt porusza się po odcinku prostej $y = \frac{A}{D} x$.

- Dla $\phi = \pi/2$ otrzymujemy:

$$\frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 , \quad (65)$$

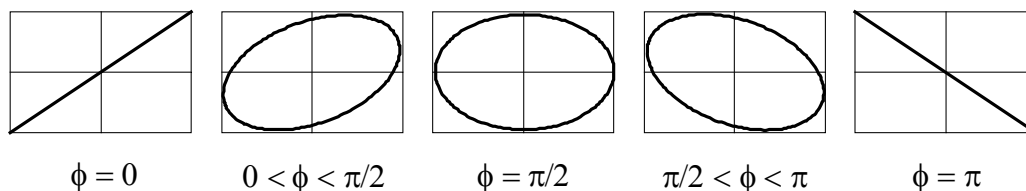
a więc torem punktu jest elipsa, której osiami są osie układu współrzędnych.

- Dla $\phi = \pi$ (fazy przeciwne) otrzymujemy:

$$\frac{x^2}{D^2} + \frac{2xy}{AD} + \frac{y^2}{A^2} = 0 \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{x}{D} + \frac{y}{A} \right)^2 = 0 , \quad (66)$$

skąd wynika, że punkt porusza się po odcinku prostej $y = -\frac{A}{D} x$.

Zestawienie tych przypadków przedstawia rys.6.



Rys. 6. Składanie prostopadłych drgań harmoniczych.