

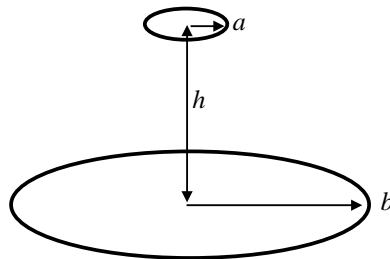
Zadania na zaliczenie ćwiczeń z Elektrodynamiki

semest letni 2009

literatura:

- J. D. Jackson, *Elektrodynamika klasyczna*, PWN 1987
- D. J. Griffiths, *Podstawy Elektrodynamiki*, PWN 2001
- M. Suffczyński, *Elektrodynamika*, PWN 1980
- W. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison Wesley 1963
- А.И. Алексеев, *Сборник задач по классической электродинамике*, Наука 1977
- В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Москва 2002
- В.В. Гильденбург, *Сборник задач по электродинамике*, Физматлит 2001
- И.Н. Мешков, Б.В. Чириков, *Электромагнитное поле*, Наука 1987
- M.H. Nayfeh, M.K. Brussel, *Electricity and Magnetism*, J. Wiley 1985

-
1. (*Griffiths 7.20*) Obliczyć współczynniki indukcyjności L_{ab} i L_{ba} dwóch kołowych współosiowych obwodów przy założeniu $a \ll b$. Zastosować bezpośrednią definicję strumienia pola magnetycznego $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$



2. (*Griffiths 6.27*) Znaleźć pole magnetyczne dla układu: dipol magnetyczny \vec{m} w środku kuli o promieniu R wykonanej z liniowego materiału magnetycznego o względnej przenikalności μ
3. (*Griffiths 6.22*) Wykazać, że siła działająca na zamknięty kontur z prądem w polu magnetycznym wynosi

$$\vec{F} = \nabla \vec{m} \cdot \vec{B}$$

gdzie \vec{m} jest momentem dipolowym konturu. Założyć, że kontur jest infinitezymalnie mały i w całce po konturze z siły Ampera zastosować rozwinięcie w szereg Taylora dla zależności $\vec{B}(\vec{r})$

4. (*Suffczyński V.14*) W liniowym ośrodku magnetycznym o względnej przenikalności μ wydrążony jest nieskończenie długi cylinder o promieniu a . Równoległe do osi cylindra w odległości b od niej biegnie drut z prądem I . Obliczyć siłę przyciągania druta do cylindra na jednostkę długości.
5. (*Suffczyński V.16*) Udowodnić, że w zagadnieniach dwuwymiarowych linie składowej potencjału wektorowego $A_z(x, y) = \text{const}$ pokrywają się z liniami indukcji magnetycznej.
6. (*Suffczyński V.6*) Prąd I_1 płynie po okręgu o promieniu a . Prąd I_2 płynie w nieskończonym prostoliniowym drucie w tej samej płaszczyźnie. Znaleźć siłę ich wzajemnego oddziaływania.
7. (*Jackson 5.7*) Powierzchnia sfery o promieniu a naładowana jest z jednorodną gęstością ładunku powierzchniowego σ . Sfera obraca się wokół swojej średnicy z prędkością kątową ω . Znaleźć potencjał wektorowy i indukcję magnetyczną wewnątrz i na zewnątrz sfery.
8. (*Griffiths 7.33*) Prąd zmienny $I_0 \cos \omega t$ płynie wzdłuż prostoliniowego przewodnika i zawraca wzdłuż walca o promieniu a , współosiowego z przewodnikiem. Znaleźć prąd przesunięcia $I_{\text{przes}} = \Phi_D$.
9. (*Griffiths 8.12*) Znaleźć moment pędu pola dla układu: punktowy ładunek elektryczny i punktowy monopol magnetyczny.
10. Znaleźć moment pędu pola dla układu: ładunek jednorodnie rozłożony na sferze o promieniu a i moment magnetyczny \vec{m} w jej środku.
11. Zakładając, że spin elektronu jest związany z jego wewnętrznym momentem pędu znaleźć prędkość na powierzchni obracającego się elektronu.
12. (*Griffiths 9.16*) Obliczyć współczynniki Fresnela dla padania pod kątem fali elektromagnetycznej na powierzchnię rozdziału dwóch dielektryków, dla przypadku polaryzacji prostopadłej do płaszczyzny padania.
13. (*Griffiths 9.29*) Obliczyć wektor Poyntinga i gęstość energii pola dla modów TM_{mn} w falowodzie o przekroju kwadratowym. Obliczyć prędkość z jaką przenoszona jest energia wzdłuż falowodu.
14. (*Griffiths 9.33*) Zakładając, że faza fali ma postać $\varphi = kr - \omega t$ (fala kulista, r — odległość od źródła fali) znaleźć rozwiązanie równania falowego $\Delta \vec{E} - (1/c^2) \partial^2 \vec{E} / \partial t^2 = 0$. Obliczyć wektor Poyntinga.
15. Obliczyć zmianę długości fali (efekt Dopplera) przy prostopadłym odbiciu płaskiej fali elektromagnetycznej od powierzchni przewodzącej (zwierciadła) poruszającej się ze stałą prędkością.
16. Obliczyć współczynniki Fresnela dla padania fali elektromagnetycznej pod kątem do granicy dwóch dielektryków, dla przypadku polaryzacji fali prostopadłej do płaszczyzny padania.
17. Płaska fala elektromagnetyczna odbija się pod kątem 45° od lustra (powierzchni przewodzącej) poruszającej się z prędkością v . Obliczyć zmianę częstotliwości fali.
18. (*Griffiths 10.9*) W nieskończonym prostoliniowym przewodniku pojawia się impuls prądu $I(t) = q_0 \delta(t)$. Obliczyć wektory Poyntinga \vec{S} i gęstość energii pola elektromagnetycznego w i sprawdzić zasadę zachowania energii $\nabla \cdot \vec{S} + \partial w / \partial t = 0$.

19. (*Griffiths 10.9*) Obliczyć pola \vec{E} i \vec{B} dla prądu $I(t) = kt$ w nieskończonym prostoliniowym przewodniku.
20. (*Griffiths 10.13*) Znaleźć potencjały Liénarda-Wiecherta dla ładunku poruszającego się po okręgu ze stałą prędkością kątową. Ograniczyć się do osi symetrii prostopadłej do okręgu.
21. (*Griffiths 10.16*) Znaleźć potencjały Liénarda-Wiecherta dla cząstki w ruchu hiperbolicznym $\vec{w}(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2} \vec{e}_x$.
22. (*Griffiths 10.17*) Znaleźć pole elektromagnetyczne na linii prostej po której porusza się ładunek (prędkość ładunku nie jest stała).
23. (*Griffiths 10.25*) Ładunek q porusza się ze stałą prędkością v wzdłuż osi x . Obliczyć całkowitą moc przepływającą przez płaszczyznę $x = a$ w chwili gdy cząstka znajduje się w punkcie $x = 0$.
24. (*Griffiths 11.14*) Obliczyć czas po którym elektron w klasycznym modelu atomu wodoru spadnie na jądro wskutek wypromieniowania energii w postaci promieniowania elektromagnetycznego.
25. (*Griffiths 11.1*) Sprawdzić, że potencjały opóźnione drgającego dipola $p = p_0 \cos \omega t$ spełniają warunek cechowania Lorentza.
26. (*Griffiths 11.9*) Dielektryczny pierścień kołowy o gęstości liniowej ładunku $\lambda = \lambda_0 \sin \varphi$ obraca się wokół swojej osi symetrii prostopadłej do pierścienia ze stałą prędkością kątową ω . Obliczyć moc promieniowania.
27. (*Griffiths 11.25*) Obliczyć moc promieniowania dla ładunku punktowego odległego o $z(t)$ od nieskończonej płaszczyzny przewodzącej.
28. Wykonać transformację Lorentza przy zadanej prędkości v , dla płaskiej fali elektromagnetycznej $E_y = E_0 \cos \omega t - kx$ wzdłuż kierunku biegu fali.
29. Obliczyć energię wypromiowaną przy centralnym zderzeniu dwóch jednakowych ładunków q o masie m . Ładunki nadbiegają z nieskończoności.
30. (*Griffiths 11.15*) Znaleźć kąt pod którym zachodzi maksimum promieniowania hamowania (bremsstrahlung).
31. (*Griffiths 11.21*) Cząstka o masie m i ładunku q jest umocowana do sprężyny o współczynniku sprężystości k , zwisającej pionowo. Położenie równowagi cząstki znajduje się na wysokości h od poziomej płaszczyzny. W chwili $t = 0$ cząstka zostaje przesunięta na odległość d poniżej punktu równowagi i zwolniona ($d \ll \lambda \ll h$). Obliczyć natężenie promieniowania docierającego do poziomej płaszczyzny pod sprężyną jako funkcję R — odległości od punktu leżącego dokładnie pod q .
32. (*Griffiths 12.40*) Obliczyć relatywistyczne przyśpieszenie cząstki o masie m i ładunku q poruszającej się z prędkością \vec{u} w polach \vec{E} i \vec{B} .
33. (*Griffiths 12.43*) Sprawdzić prawo Gaussa dla pola elektrycznego ładunku poruszającego się ze stałą prędkością v .
34. (*Griffiths 12.62*) Wykonać transformację Lorentza dla potencjału wektorowego punktowego dipola magnetycznego, dla ruchu w kierunku osi dipola $\vec{v} \parallel \vec{m}$.
35. (*Griffiths 12.67*) Znaleźć ruch naładowanej cząstki w polu $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$ i $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$ ($E_0 < cB_0$).

36. (Alekseev 98) Gęstość ładunku dla stanu wzbudzonego atomu wodoru we współrzędnych sferycznych ma postać:

$$\rho = -\frac{1}{4 \cdot 3^8} \frac{er^4}{\pi a^7} e^{-2r/3a} \sin^4 \theta$$

gdzie a jest promieniem pierwszej orbity Bohra, e — ładunek elektronu. Obliczyć moment dipolowy \vec{p} i tensor momentu kwadropolowego \hat{M} .

37. (Alekseev 154) Wektor gęstości prądu dla chmury elektronowej stanu wzbudzonego atomu wodoru ma postać:

$$J_\varphi = \frac{1}{3^8} \frac{e\hbar r^3}{\pi m a^7} e^{-2r/3a} \sin \theta \cos^2 \theta$$

Obliczyć magnetyczny moment dipolowy \vec{m} .

38. (Alekseev 201) Liniowy prąd I płynie wzdłuż osi z z nieskończoności ($z = -\infty$) do początku układu współrzędnych ($z = 0$). Stamtąd rozplywa się po płaszczyźnie $z = 0$ równomiernie we wszystkich kierunkach. Wyznaczyć natężenie pola magnetycznego \vec{H} w całej przestrzeni. Sprawdzić warunek brzegowy dla \vec{H} przy przejściu przez płaszczyznę $z = 0$.
39. (Alekseev 205) Dwie nieskończone równoległe płaszczyzny są odległe od siebie o a . Wzdłuż obu płaszczyzn płynie w tą samą stronę stały prąd powierzchniowy κ . Znaleźć natężenie pola magnetycznego \vec{H} w dużej odległości od płaszczyzn $r \gg a$.
40. (Alekseev 232) Wyznaczyć energię zgromadzoną w polu magnetycznym wytwarzanym przez nieskończony cylinder o promieniu R , naładowany ze stałą gęstością powierzchniową σ i obracający się wokół swojej osi z prędkością kątową ω . Wynik wyrazić przez dipolowy moment magnetyczny cylindra. Wszystkie obliczenia wykonać dla jednostki długości cylindra.
41. (Alekseev 264) Płaska fala elektromagnetyczna pada na powierzchnię nieruchomej sfery o promieniu R i ulega całkowitemu odbiciu. Długość fali $\lambda \ll R$, wobec czego można zaniedbać zjawisko dyfrakcji. Obliczyć siłę działającą na sferę, uśrednioną po czasie.
42. (Alekseev 289) Cząstka o masie m i ładunku q przelatuje wzdłuż średnicy kuli o promieniu R , naładowanej jednorodnie ładunkiem Q . Na początku cząstka miała energię kinetyczną E_0 . Obliczyć stratę energii cząstki wskutek promieniowania.
43. (Alekseev 313) Znaleźć moc magnetycznego promieniowania dipolowego dla anteny w kształcie prostokąta o bokach a i b wzdłuż którego płynie prąd $I(t) = I_0 \cos \omega t$.
44. (Alekseev 320) W kwadratowej ramce o boku l płynie prąd $I(t) = I_0 \exp(-at^2)$. Obliczyć całkowitą energię magnetycznego promieniowania dipolowego, wypromieniowaną w przedziale czasu $-\infty < t < \infty$.
45. (Alekseev 338) Dwa równoległe dipole punktowe o momentach \vec{p} i $-\vec{p}$, odległe od siebie o $2a$, obracają się ze stałą prędkością kątową ω w płaszczyźnie prostopadłej do linii która je łączy. Obliczyć moc dipolowego promieniowania elektrycznego takiego układu w przybliżeniu dużej długości fali $a \ll \lambda$.
46. (Alekseev 462) Wzdłuż nieskończonej prostej płynie stały prąd I . Prostopadle do niej w odległości l przelatuje cząstka relatywistyczna o masie spoczynkowej m_0 i ładunku q . Założyć w przybliżeniu, że trajektoria cząstki jest linią prostą, a jej prędkość $v = \text{const}$. Obliczyć całkowitą stratę energii cząstki wskutek promieniowania.

47. (Batygin 119) Znaleźć rozkład ładunku, który odpowiada potencjałowi elektrostatycznemu w postaci:

$$\varphi(\vec{r}) = q_0 e^{-\alpha r}$$

gdzie q_0, α — stałe.

48. (Batygin 133) Wewnątrz kondensatora sferycznego o promieniach okładek $a < b$ znajduje się dielektryk o przenikalności:

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{dla } a < r < c \\ \epsilon_2 & \text{dla } c < r < b \end{cases}$$

Wyznaczyć pojemność kondensatora, rozkład ładunków związanych i całkowity ładunek związany w dielektryku.

49. (Batygin 416) Znaleźć współczynnik odbicia płaskiej fali elektromagnetycznej od przewodzącej płaszczyzny, przy padaniu prostopadłym, w granicy nieskończenie małej przewodności właściwej przewodnika.
50. (Batygin 612) Dla pola punktowego dipola elektrycznego wykonać transformację Lorentza do układu odniesienia poruszającego się z prędkością v .
51. (Batygin 735) Dwa punktowe dipole elektryczne p_0 drgają z tą samą częstotliwością ω , z różnicą faz $\pi/2$. Odległość między nimi jest dużo mniejsza niż długość fali promieniowania. Obliczyć całkowitą moc promieniowania zakładając, że kąt pomiędzy kierunkami dipoli wynosi φ .
52. (Gildenburg 2.22) Znaleźć potencjał elektrostatyczny $V(x, y)$ pomiędzy dwiema nieskończonymi, równoległymi płaszczyznami $x = 0$ i $x = L$. Na pierwszej płaszczyźnie $V = 0$, na drugiej $V = V_0 \sin ky$.
53. (Gildenburg 2.45) Dwa ładunki punktowe $+q$ i $-q$ umieszczone są na biegunach kuli o promieniu a i względnej przenikalności dielektrycznej ϵ . Znaleźć potencjał elektrostatyczny w dużej odległości od kuli $r \gg a$.
54. (Gildenburg 8.12) Płaska fala elektromagnetyczna pada pod kątem θ na powierzchnię dielektryka o względnej przenikalności ϵ . Dla jakiej wartości kąta θ amplituda pola elektrycznego fali w dielektryku osiągnie maksimum. Założyć polaryzację w płaszczyźnie padania.
55. (Gildenburg 9.5) W kołowej ramce o promieniu a płynie prąd $I = I_0 \cos \omega t$. Znaleźć opór falowy ramki, czyli opór omowy, który dawałby taką stratę mocy jaka wynika z magnetycznego promieniowania dipolowego.
56. Stosując potencjały opóźnione znaleźć pole elektromagnetyczne wokół nieskończonego przewodnika z prądem $I(t) = I_0 \cos \omega t$.
57. (Meshkov s.51) Przestrzeń pomiędzy dwoma przewodzącymi cylindrami o promieniach a i b wypełniona jest materiałem o przewodności $\sigma(r) = \sigma_0 r^2$, gdzie r jest odległością od osi cylindrów. Znaleźć rozkład potencjału pomiędzy cylindrami i opór liczony na jednostkę długości.
58. (Meshkov s.133) Znaleźć moc promieniowania dla pary elektronów poruszających się po tym samym okręgu w stałym polu magnetycznym. Elektrony znajdują się na przeciw siebie.

59. (Panofsky 1.11) Dwa odcinki o długości a , naładowane ze stałą gęstością liniową λ , przecinają się w środku pod kątem prostym. Obliczyć potencjał elektostatyczny w przybliżeniu $r \gg a$, z dokładnością do członów $1/r^4$.
60. (Panofsky 6.3) W stałym polu elektrycznym umieszczono przewodzącą sferę o promieniu R . Obliczyć siłę, która usiłuje rozerwać sferę na dwie połowy.
61. (Panofsky 6.5) Punktowy dipol elektryczny znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym. Obliczyć siłę działającą na dipol, całkując tensor napięć Maxwella po sferze, w środku której znajduje się dipol.
62. (Panofsky 6.4) W jaki sposób nawinąć cewkę na powierzchnię sfery, tak aby wewnątrz pole magnetyczne było jednorodne?
63. (Panofsky 13.4) Punktowy dipol elektryczny leżący w płaszczyźnie xy , obraca się wokół osi z ze stałą prędkością kątową. Wyznaczyć składowe pola magnetycznego w układzie cylindrycznym, w dużej odległości od dipola.
64. (Panofsky 19.3) Pokazać, że główna część promieniowania cząstki ultrarelatywistycznej wysyłana jest przez nią w wąski stożek o kącie $\theta = E_0/E$, gdzie jest energią cząstki, a E_0 jej energią spoczynkową.
65. (Nayfeh 3.9) Dany jest kondensator cylindryczny o promieniach $R_1 > R_2$. Wewnętrzny cylinder został odsunięty od wspólnej osi na odległość $\delta \ll R_1$. Wyznaczyć potencjał elektostatyczny w przestrzeni między cylindrami.
66. (Nayfeh 3.10) Cylinder o promieniu R został naładowany z gęstością ładunku $\sigma(\phi) = \sigma_1 \sin \phi + \sigma_2 \sin 2\phi$. Rozwiązać równanie Laplace'a.
67. (Nayfeh 3.5.3) Wyznaczyć pojemność kondensatora złożonego z dwóch równoległych nieskończonych cylindrów o promieniu R odległych o $d > 2R$.
68. (Nayfeh 3.21) Gęstość ładunku w obszarze $-z_0 < z < z_0$ zależy tylko od z : $\rho(z) = \rho_0 \cos \frac{\pi z}{z_0}$. Wyznaczyć potencjał elektostatyczny w całej przestrzeni.
69. (Nayfeh 3.25) Wyznaczyć rozkład ładunku, który wytwarza następujący potencjał:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) \exp\left(\frac{-2r}{a}\right)$$

70. (Nayfeh 8.10) Znaleźć potencjał wektorowy nieskończonego cylindrycznego przewodnika o promieniu R przez który płynie prąd I . Prąd płynie równomiernie przez cały przekrój poprzeczny przewodnika.
71. (Nayfeh 8.7) Znaleźć potencjał wektorowy dwóch równoległych nieskończone cieniłych przewodników z prądem odległych od siebie o d . Prądy w przewodnikach płyną w przeciwnych kierunkach.
72. (Nayfeh 12.9) Obliczyć współczynnik samoindukcji dla układu dwóch cylindrycznych równoległych przewodników o promieniu R i umieszczonych w odległości $d > 2R$.
73. (Nayfeh 16.4) Obszar $0 < z < z_0$ jest wypełniony dielektrykiem o względnej przenikalności dielektrycznej $\epsilon = 4$. Liniowo spolaryzowana fala elektromagnetyczna pada prostopadłe na płaszczyznę $z = 0$. Obliczyć natężeniowy współczynnik odbicia fali od warstwy dielektryka.